11.04.2016

# 1. Gleichmäßige Konvergenz

## § 1.1. Motivation und Definition

Viele wichtige Funktionen erhalten wir durch Grenzwertprozesse, z.B. Exponential, Sinus, Cosinus usw. Für Exponential lautet die Definition: für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$e^x := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)$$

Wir sagen, dass die Exponentialfunktion als Grenzwert von Polynomen (nämlich den Partialsummen der Reihe) definiert ist.

Können wir die Eigenschaften der Polynomen benutzen um Eigenschaften der Expfkt herzuleiten?

Ein Polynom $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist leicht abzuleiten:

$$P'(x) = \left( \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)' = \sum_{k=0}^{n} (a_k x^k)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Können wir die Expfkt wie ein Polynom ableiten?

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \overset{!!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Genauer haben wir hier folgendes gemacht.
Sei $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ die Partialsumme der Expfkt,
$e^x = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$. Wir würden gerne schreiben

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} P_n(x) \overset{!!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_{n-1}(x) = e^x$$

Wir wissen, dass das Ergebnis korrekt ist, aber ist auch die Methode korrekt? An der Stellen (!!) haben wir Limes und Differentiation vertauscht. Das funktioniert nicht immer!

Betrachte die logarithmische Reihe,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\frac{d}{dx} \log(1+x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \text{ für } x \in (-1, 1) \text{ (geometrische Reihe)}$$

Wir haben also

$$\frac{d}{dx} \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \text{ für } x \in (-1, 1)$$

aber $\frac{1}{2} = \frac{d}{dx} \log(1+x) \Big|_{x=1} \neq \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \Big|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

denn die Reihe rechts nicht konvergent ist.

Um genauer zu untersuchen, wann dürfen Grenzwertprozesse vertauscht werden, führen wir folgende Definition.

<u>1.1.1. Definition</u> Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f, f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Die Funktionenfolge $(f_n)$

(i) <u>konvergiert punktweise</u> gegen $f$ auf $D$, falls für jedes $x \in D$ gilt:

$$f_n(x) \longrightarrow f(x)\,,\quad n \to \infty,$$

(ii) <u>konvergiert gleichmäßig</u> gegen $f$ auf $D$ falls gilt.

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0\,,\quad n \to \infty.$$

14.04.2016

<u>Notation</u> Für $g : D \to \mathbb{C}$ setze

$$\|g\|_D := \sup_{x \in D} |g(x)| \in [0, \infty]$$

$\|g\|_D$ heißt Supremumsnorm von $g$; (ii) lautet:
$(f_n)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f$, falls

$$\|f_n - f\|_D \to 0\,,\quad n \to \infty.$$

Wir schreiben: $f_n \to f, n \to \infty$ punktweise (bzw. glm.)

<u>1.1.2 Bemerkung</u> (i) Vergleichen wir punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

Punktweise Konvergenz:

$$\underbrace{\forall x \in D,}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n = n(x, \varepsilon)\ \forall n \geq n(x, \varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

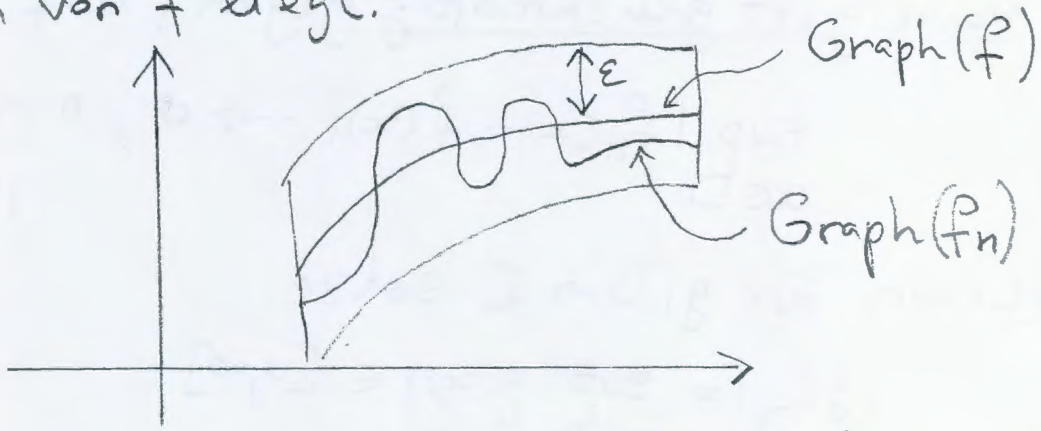
Gleichmäßige Konvergenz:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)\ \forall n \geq n(\varepsilon) : \|f_n - f\|_D \leq \varepsilon \quad \text{d.h.}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)\ \forall n \geq n(\varepsilon)\ \underbrace{\forall x \in D} : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Der Unterschied ist die Position des Quantors $\forall x \in D$. Deshalb darf $n_0$ bei punktweise Konvergenz von $x$ abhängen, bei der gleichmäßigen nicht.

(ii) Geometrisch bedeutet die gleichmäßige Konv, dass der Graph von $f_n$ für alle genügend großen $n$ in jedem beliebig schmalen Streifen um den Graphen von $f$ liegt.




(iii) Konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig, so konvergiert $f_n \to f$ punktweise. Die Umkehrung gilt nicht.

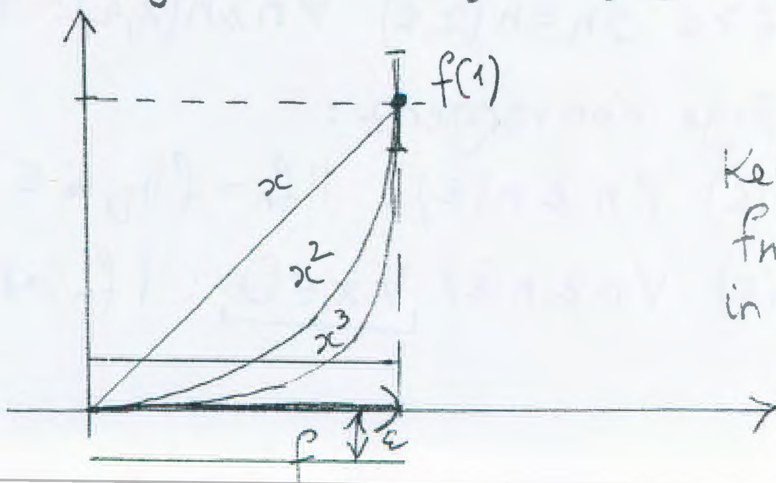
Beispiel: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0,1) \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

Dann $f_n \to f$ punktweise. Aber für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(f_n - f)(x) = \begin{cases} x^n & , x \in [0,1) \\ 0 & , x = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \|f_n - f\|_{[0,1]} = 1$$

also $f_n$ konvergiert nicht glm gegen $f$.




Kein Graph von $f_n$ befindet sich in der $\varepsilon$-Streifen um Graph($f$).

**1.1.3 Definition** Sei $\sum_{n\geq 0} f_n$ eine Reihe von Funktionen auf $D \subset \mathbb{C}$. Wir sagen, dass

(i) $\sum_{n\geq 0} f_n$ konvergiert punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen $f: D \to \mathbb{C}$ falls die Folge der Partialsummen punktweise (bzw. glm.) gegen $f$ konvergiert.

(ii) $\sum_{n\geq 0} f_n$ konvergiert normal, falls $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_D < \infty$.

Der Begriff "normale Konvergenz" ist wichtig, da er glm Konvergenz auf die Konvergenz einer numerischen Reihe reduziert.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ konvergiert normal auf $[-1,1]$

**1.1.4. Satz** Konvergiert eine Reihe normal, so auch glm.

**Beweis** Es gilt für jedes $x \in D$:

$$\sum_{n\geq 0} |f_n(x)| \leq \sum \|f_n\|_D < \infty$$

also ist $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ absolut konvergent und sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Wir zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ gleichmäßig.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N$ mit $\sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_k\|_D < \varepsilon$.

Dann gilt für alle $x \in D$, $n \geq N$:

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_D$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_k\|_D < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Es gilt also für Funktionenreihen:

$$\begin{array}{ccc} \text{Normale Konvergenz} & \Longrightarrow & \text{Gleichmäßige Konvergenz} \\ & & \Downarrow \\ & & \text{Punktweise Konvergenz} \end{array}$$

## §1.2. Vertauschungssätze

**1.2.1 Satz** Die Folge $f_n$ konvergiere gleichmäßig gegen $f$ auf $D$ und alle $f_n$ seien stetig in $x_0 \in D$. Dann ist auch $f$ stetig in $x_0$

**Beweis** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$f_n$ stetig in $x_0 \rightsquigarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$:

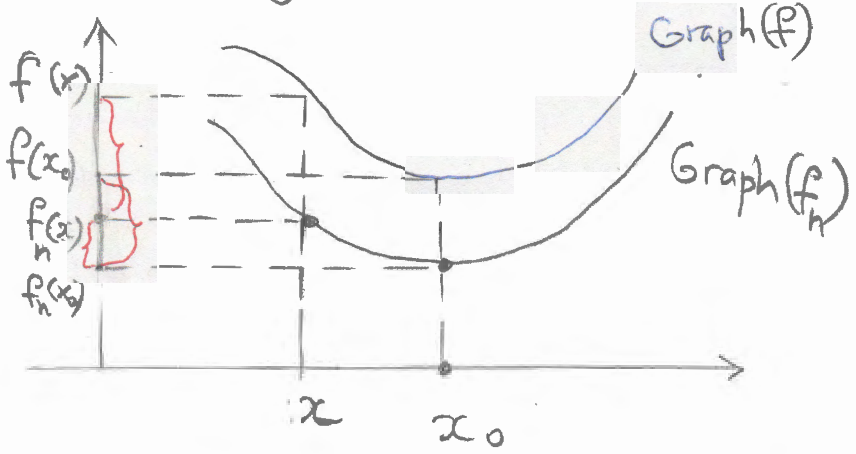
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\leq \|f - f_n\|_D < \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Somit ist $f$ stetig in $x_0$.




**Bemerkung:** Wenn $f_n \to f$ punktweise mit $f_n$ stetig, ist $f$ nicht unbedingt stetig, z.B. $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ und $f(x) = 0$, $x \in [0,1)$, $f(1) = 1$.

**1.2.2 Satz** (Vertauschung von Grenzwert & Integral)
Seien $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Die Funktionen $f_n$ seien stetig.
Dann gilt

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis Wir wissen, dass stetige Funktionen Riemann-integrierbar sind, also haben die Integrale Sinn.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n(\varepsilon)$ so dass für alle $n \geq n(\varepsilon)$ und $x \in [a,b]$ gilt $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$

Dann gilt für $n \geq n(\varepsilon)$:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b-a)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot b-a = \varepsilon$$ ∎

**1.2.3 Bemerkung** (i) Sei $\sum_{n\geq 0} f_n$ eine gleichmäßig konvergente Reihe von Fkten $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$. Dann ist die Reihe der Integrale $\sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)\,dx$ konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

(ii) Man kann eine allgemeinere Fassung des Satzes 1.2.2 beweisen: Konvergiert $f_n \to f$ glm auf $[a,b]$ und sind $f_n$ Riemann-integrierbar, so ist $f$ Riemann-integrierbar und $(*)$ gilt.

18.04.2016

**1.2.4 Satz** (Vertauschung von Grenzwert und Differentiation)

Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaften:

(i) $f_n \to f$ punktweise auf $[a,b]$,

(ii) $f_n$ stetig differenzierbar für jedes $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $(f_n')$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $g : [a,b] \to \mathbb{C}$

Dann ist $f$ differenzierbar und $f' = g$. Es gilt also

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Beweis (ii) & Hauptsatz der Diff- und Integralrechnung

$$\rightsquigarrow \forall x \in [a,b] : \quad f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

$$\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) + \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

$$\underset{\text{Satz 1.2.2}}{\overset{(i),(iii)}{\rightsquigarrow}} \quad f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \quad (*)$$

(iii) $\rightsquigarrow$ $g$ stetig ; $(*)$ & Hauptsatz $\rightsquigarrow$ $f$ diffbar, $f'(x) = g(x)$

für alle $x \in [a,b]$. ∎

Beispiel. Die wesentliche Voraussetzung ist 1.2.4 (iii).
Die glm Konvergenz der Folge $(f_n)$ reicht i.a. nicht aus.
Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x + \frac{1}{n^n}}$. Für alle $x \in [0,1]$ gilt $0 \le f_n(x) \le f_n(1) = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n^n}} < \frac{2}{n}$ also $f_n \to 0$ punktweise (sogar glm, da $\|f_n\| < \frac{2}{n}$). (i) ist erfüllt.
(ii) ist auch erfüllt und

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\left(x + \frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}-1} \rightsquigarrow f_n'(0) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^{n \cdot \frac{1-n}{n}}}$$

$$= n^{n-3} \longrightarrow \infty. \text{ Es gilt also } f'(0) \ne \lim_{n\to\infty} f_n'(0).$$

## §1.3. Potenzreihen und analytische Funktionen

Sei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$, wobei $a_n \in \mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$. Wissen, dass die Reihe in $(-R,R)$ konvergiert und in $\mathbb{R}\setminus[R,R]$ divergiert.

**1.3.1. Satz** $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ konvergiert normal auf $[-r,r]$ für alle $0<r<R$.

**Beweis** Sei $x\in[-r,r]$. Dann gilt $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$. Sei $f_n(x) = a_n x^n$. Dann $\|f_n\|_{[-r,r]} \leq |a_n| r^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$ da eine Potenzreihe in $(-R,R)$ absolut konvergiert. Majorantenkriterium $\leadsto \sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{[-r,r]}$ konvergent. ▨

**1.3.2 Satz** Sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit KR $R>0$. Dann ist $P:(-R,R)\to\mathbb{C}$ stetig und für alle $a,b\in(-R,R)$ gilt

$$\int_a^b P(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$$

d.h. die Potenzreihe kann gliedweise integriert werden.

**Beweis** Die PR konvergiert glm auf $[a,b]$ wegen Satz 1.3.1. Wir können Satz 1.2.2 anwenden. ▨

**1.3.3 Beispiel** (Logarithmische Reihe)

Die geom Reihe $\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n$ hat KR 1.

Integriere gliedweise auf $[0,x]$ (oder $[x,0]$) für $x\in(-1,1)$

$$\leadsto \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Also $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1)$.

Was passiert für $x \in \{-1,1\}$? Für $x=-1$ ist $\log(1+x)$ nicht definiert. Außerdem ist

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent, wir können also für $x=-1$ nichts behaupten. (harmonische Reihe)

Für $x=1$ ist $\log(1+x)$ definiert und die PR wird die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

Sie konvergiert nach dem Leibniz Kriterium

Es ist nicht selbstverständlich, dass

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n}$$

gilt. Beachte nun dass für $x \in [0,1)$ die Log-Reihe die Hypothesen des Leibniz-Kriteriums erfüllt ($\frac{x^n}{n}$ monoton fallende Nullfolge)

Abschätzung des Leibniz-Kriteriums

$$\left| \log(1+x) - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+1}$$

Für $x \to 1 \rightsquigarrow \left| \log 2 - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{N+1}; \quad N \to \infty$

$$\rightsquigarrow \log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}. \quad \blacksquare$$

Allgemein gilt:

**1.3.4 Abelscher Grenzwertsatz** Die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ habe den Konvergenzradius $R>0$. Ist die Reihe für $x=R$ konvergent, so ist sie gleichmäßig konvergent auf $[0,R]$ und $\lim_{x \nearrow R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

**1.3.5 Satz** (Gliedweise Differentiation)
Die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ habe Konvergenzradius $R>0$. Dann hat die gliedweise abgeleitete Reihe $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ Konvergenzradius $R$ und die Summe $P:(-R,R)\to \mathbb{C}$, $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt

$$P'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ für alle } x\in(-R,R).$$

**Beweis** Sei $r\in(-R,R)$. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ gleichmäßig auf $[0,r]$ (bzw. $[r,0]$ falls $r\leq 0$). Satz 1.3.2

$$\rightsquigarrow \int_0^r \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^r n a_n x^{n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$$

Nun ist $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ stetig auf $[0,r]$, also liefert den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} r^{n-1} \quad \text{für alle } r\in(-R,R).$$

$\rightsquigarrow$ Behauptung. Alternativ wendet man direkt Satz 1.2.4. ▨

**1.3.6 Satz** Sei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$ und $P:(-R,R)\to\mathbb{C}$ ihre Summe. Dann ist $P$ unendlich oft differenzierbar auf $(-R,R)$ und es gilt für alle $k\in\mathbb{N}_0$, $x\in(-R,R)$

$$P^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k}$$

insbesondere

$$P^{(k)}(0)=k!\,a_k$$

also $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P^{(k)}(0)\, x^k$, $x \in (-R, R)$, d.h.
$P(x)$ ist durch ihre Taylorreihe darstellbar.

Bemerkung Diese Sätze wurden in Analysis I mit anderen Methoden bewiesen (Th. 11.15, Korollar 11.18).

1.3.7 Definition Eine Funktion $f: I \to \mathbb{C}$ sei unendlich oft differenzierbar auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sie heißt analytisch falls für jedes $x_0 \in I$ existiert $r > 0$ so dass $f$ auf $I \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ durch ihre Taylorreihe darstellbar ist:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap I.$$

Beispiele (1) exp, sin, cos, sinh, cosh sind analytisch auf $\mathbb{R}$.
Für exp ist es leicht zu zeigen: für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^x = e^{x_0} e^{x - x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x - x_0)^n$$

(2) Eigentlich sind alle Potenzreihen in Konvergenzbereich analytisch. Dabei muss man die Reihe umentwickeln.

(3) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

ist unendlich oft differenzierbar und $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Ihre Taylorreihe ist überall Null. Die Funktion $f$ kann nicht mit der Taylorreihe in der Nähe von Null übereinstimmen, da $e^{-1/x} > 0$.

# 2. Metrische und topologische Räume

## 2.1. Wichtige Ungleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt

konvex $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I \; x_1 \neq x_2 \; \forall \lambda \in (0,1)$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

streng konvex $:\Leftrightarrow$ —"— $<$

konkav $:\Leftrightarrow$ —"— $\geq$

streng konkav $:\Leftrightarrow$ —"— $>$

### 2.1.1 Konvexitätskriterium

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, zweimal differenzierbar in $(a,b)$. Dann gilt:

(a) $f$ konvex $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ in $(a,b)$

(b) $f'' > 0 \Rightarrow f$ streng konvex

(c) $f$ konkav $\Leftrightarrow f'' \leq 0$ in $(a,b)$

(d) $f'' < 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ streng konkav.

### 2.1.2. Jensensche Ungleichung

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ konvex. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ und $x_1, \dots, x_n \in I$ so gilt

$$(*) \quad f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Ist $f$ streng konvex und gilt Gleichheit in $(*)$ gdw $x_1 = \dots = x_n$.

Für konkaves $f$ gilt $\geq$ in $(*)$.

Beweis durch Induktion. Für $n=1$: $\lambda_1 = 1$ und die Aussage ist trivial, $f(x_1) \leq f(x_1)$.

$n \mapsto n+1$ Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$

Setze $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, $\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n = x \in I$ (wieso?)

(**) $$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = f\Big(\lambda \cdot \overbrace{\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda}}^{x} + \lambda_{n+1} x_{n+1}\Big)$$

$$\leq \lambda f(x) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \underset{IV}{\leq} \lambda \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} f(x_n)\Big) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$\leadsto$ Behauptung für $n+1$

Ist $f$ streng konvex und $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ und $\lambda_1 \in (0,1)$ so muss $x_1 = x_2$.

$n \leadsto n+1$: Gilt Gleichheit in (**) mit $\lambda_{n+1} \in (0,1)$ so gilt zunächst $x = x_{n+1}$ und wegen $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)$ $= \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$ und IV $\leadsto x_1 = \dots = x_n$.

$$\leadsto x_{n+1} = \frac{\lambda_1 x_n + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda} = x_n = \dots = x_1 .$$ ▨

## 2.1.3 AGM Ungleichung

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, $x_1, \dots, x_n > 0$

Dann gilt
$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Insbesondere $$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Gleichheit gilt gdw $x_1 = \dots = x_n$.

Notation: $x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ heißt gewichtetes geometrisches Mittel

$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ gewichtetes arithmetisches Mittel von $x_1, \dots, x_n$

Beweis $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist streng konkav, da $\log'' x = -\frac{1}{x^2} < 0$

Jensensche Ungleichung $\leadsto$ $\log(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 \log x_1 + \dots + \lambda_n \log x_n$

und Anwendung der Exponentialfunktion

$$\exp(\log(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)) \geq \exp(\lambda_1 \log x_1 + \dots + \lambda_n \log x_n)$$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \qquad \exp\left(\log\left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}\right)\right) = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}. \quad \boxtimes$$

$\boxed{25.04.2016}$

Für $z \in \mathbb{C}^n$ definiere die p-Norm von $z$ mit

$$\|z\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^p\right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

2.1.4. Höldersche Ungleichung

Es seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k w_k| \leq \|z\|_p \|w\|_p.$$

Beweis Ist $z = 0$ oder $w = 0$ so sind beide Seiten gleich.

Sei $z \neq 0$, $w \neq 0$. Wende AGM Ungl auf $\frac{|z_k|^p}{\|z\|_p^p}, \frac{|w_k|^q}{\|w\|_q^q} \leadsto$

$$\frac{|z_k|}{\|z\|_p} \frac{|w_k|}{\|w\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|z_k|^p}{\|z\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|w_k|^q}{\|w\|_q^q}$$

$$\leadsto \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k| \cdot |w_k|}{\|z\|_p \|w\|_q} \leq \frac{1}{p} \sum \frac{|z_k|^p}{\|z\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum \frac{|w_k|^q}{\|w\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \boxtimes$$

2.1.5 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k w_k| \leq \|z\|_2 \|w\|_2$$

Gleichheit gilt gdw $z$ und $w$ linear unabhägig sind.

## 2.1.5 Minkowskische Ungleichung

Für $p \geq 1$ und $z, w \in \mathbb{C}^n$ gilt $\|z+w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p$.

<u>Beweis</u> Für $p=1$ ergibt sich die Ungleichung aus der Dreiecksungl $|z_k + w_k| \leq |z_k| + |w_k|$.

Sei $p > 1$ und $q$ definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ d.h. $q = \frac{p}{p-1}$.

Falls $\|z+w\|_p = 0$ ist die Behauptung klar.

Sei $\|z+w\|_p > 0$. Dann gilt:

$$\|z+w\|_p^p = \sum |z_k+w_k|^p = \sum |z_k+w_k| \cdot |z_k+w_k|^{p-1}$$

$$\leq \sum (|z_k| + |w_k|)|z_k+w_k|^{p-1} = \sum |z_k||z_k+w_k|^{p-1} + \sum |w_k||z_k+w_k|^{p-1}$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum |z_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum |z_k+w_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum |w_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum |z_k+w_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$= \left(\|z\|_p + \|w\|_p\right)\left(\sum |z_k+w_k|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} = \left(\|z\|_p + \|w\|_p\right)\|z+w\|_p^{p-1}$$

Wir dividieren durch $\|z+w\|_p^{p-1} > 0$ und erhalten die Behauptung. $\blacksquare$