25.4.
2016

2.1.4 Norm Sei V ein K-Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)
Eine Abbildung $V \ni v \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$ heißt Norm, falls gilt:

(N1) $\|v\| \geq 0 \; \forall v \in V$, und aus $\|v\| = 0$ folgt $v = 0$

(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \quad \forall \lambda \in K, v \in V$

(N3) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)

Beispiele: 1) Euklidische Norm $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

2) p-Norm: $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $p \geq 1$:

$$\|z\|_p = \left(|z_1|^p + \ldots + |z_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(N1) „≥ 0" ✓ ; $0 = \|z\|_p = \left(|z_1|^p + \ldots + |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$$\Leftrightarrow z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0 \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(N2) $$\|\lambda z\|_p = \left\| \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\|_p = \left\| \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_n \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= \left(|\lambda z_1|^p + \ldots + |\lambda z_n|^p \right)^{1/p}$$

$$= \left(|\lambda|^p |z_1|^p + \ldots + |\lambda|^p |z_n|^p \right)^{1/p}$$

$$= |\lambda|^{p \cdot \frac{1}{p}} \left(|z_1|^p + \ldots + |z_n|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \, \|z\|_p$$

(N3) Diese Eigenschaft wird durch den übernächsten Satz bewiesen

2.15 Höldersche Ungleichung

Es seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k w_k| \leq \|z\|_p \, \|w\|_q$$

Beweis: Ist $z = 0$ oder $w = 0$, dann sind beide Seiten gleich 0 und die Ungleichung ist somit erfüllt. Sei nun $z \neq 0$ und $w \neq 0$

$$\frac{|z_k|}{\|z\|_p} \cdot \frac{|w_k|}{\|w\|_q} = \left(\frac{|z_k|^p}{\|z\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|w_k|^q}{\|w\|_q^q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\overset{\text{AGM-Ungl.}}{\leq} \frac{1}{p} \frac{|z_k|^p}{\|z\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|w_k|^q}{\|w\|_q^q}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|\cdot|w_k|}{\|z\|_p \cdot \|w\|_q} \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{|z_k|^p}{\|z\|_p^p} + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\frac{|w_k|^q}{\|w\|_q^q}$$

$$= \frac{1}{p}\frac{1}{\|z\|_p^p}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p}_{=\|z\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{1}{\|z\|_q^q}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|w_k|^q}_{=\|w\|_q^q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

$$\overset{\cdot\|z\|_p\|w\|_q}{\Longrightarrow} \quad \sum_{k=1}^{n}|z_k|\cdot|w_k| \leq \|z\|_p \cdot \|w\|_q \qquad \blacksquare$$

2.1.7 Minkowskische Ungleichung

Für $p \geq 1$ und $z, w \in \mathbb{C}^n$ gilt $\|z+w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p$

Beweis: Fall $p=1$:

$$\|z+w\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|z_k+w_k| \leq \sum_{k=1}^{n}(|z_k|+|w_k|) = \sum_{k=1}^{n}|z_k| + \sum_{k=1}^{n}|w_k|$$

$$\leq \|z\|_p + \|w\|_p$$

Fall $p>1$: setze $q := \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \left(1-\frac{1}{p}\right) = 1$

O.B.d.A. $\|z+w\|_p \neq 0$ (sonst ist die Ungleichung sowieso war)

Dann gilt

$$\|z+w\|_p^p = \sum_{k=1}^{n}|z_k+w_k|^p = \sum_{k=1}^{n}|z_k+w_k|\,|z_k+w_k|^{p-1}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}(|z_k|+|w_k|)\,|z_k+w_k|^{p-1}$$

$(p-1)q = (p-1)\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = (p-1)\frac{p}{p-1} = p$

$$= \sum_{k=1}^{n}|z_k|\,|z_k+w_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}|w_k|\,|z_k+w_k|^{p-1}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k+w_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k+w_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (\|z\|_p + \|w\|_p)\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k+w_k|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \qquad \Big|:\|z+w\|_p^{p-1}$$

$$\Leftrightarrow \|z+w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p \qquad \blacksquare$$

2.1.8 Def + Satz p-Norm

$\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf $\mathbb{C}^n$. Sie wird p-Norm genannt.

2.2 Metrische und normierte Räume

2.2.1 Def (Metrik, metr. Räume)

Sei X eine nichtleere Menge. Eine <u>Metrik</u> auf X ist eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$ für die gilt

(M1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Positivität)

(M2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$ (Symmetrie)

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar (X,d) heißt ein <u>metrischer Raum</u>.
Die Elemente $x \in X$ werden auch <u>Punkte</u> genannt.
Die Zahl $d(x,y)$ heißt <u>Abstand (bzgl. d) von x und y</u>.

2.2.2 Lemma (Umgekehrte Dreiecksungleichung)

~~Bewei~~ $|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$.

<u>Beweis</u>: Übung

<u>Beispiele</u>: 1) $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $d(x,y) = |x-y|$

2) $X = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, $d(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$
Diese Metrik wird die <u>euklidische Metrik</u> genannt.

3) $X = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, $d(x,y) = \|x-y\|_p$

4) Supremumsmetrik
Sei $D \neq \emptyset$ eine Menge und
$$B(D) := \{ f: D \to \mathbb{C} : \|f\|_D := \sup_{x \in D} \|f(x)\| < \infty \}$$
der Raum der beschränkten Funktionen auf D mit Werten in $\mathbb{C}$. $d_D(f,g) := \|f-g\|_D$ ist eine Metrik auf D.

5) Sei $C^0([a,b])$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[a,b]$. Dann ist $(C^0([a,b]), d_{[a,b]})$ ein metr. Raum.

6) Sei X ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|$.

Dann ist X mit $d(x,y)=\|x-y\|$ ein metrischer Raum: 28.5.2016

(M1) $d(x,y)=\|x-y\| \overset{(N1)}{\geq} 0$; $d(x,y)=\|x-y\|=0$

$\overset{(N1)}{\iff} x-y=0 \iff x=y$

(M2) $d(x,y)=\|x-y\|=\|-(y-x)\| \overset{(N2)}{=} |-1|\,\|y-x\|$

$=\|y-x\|=d(y,x)$

(M3) $d(x,y)=\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|$

$\overset{(N3)}{\leq} \|x-z\|+\|z-y\| = d(x,z)+d(z,y)$

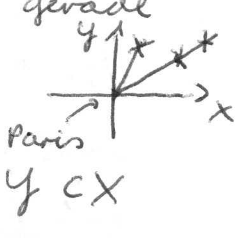
Achtung! Metrische Räume sind im allgemeinen <u>keine</u> normierten Räume. Sie müssen noch nicht einmal Vektorräume sein.

7) Die „diskrete" Metrik: Sei X eine nichtleere Menge und $d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$. (X,d) ist ein metrischer Raum: (M1) und (M2) sind offensichtlich richtig.

(M3) Fall	$d(x,z)$	$d(x,y)$	$d(y,z)$	
$x\neq y\neq z$, $x\neq z$	1	1	1	$1\leq 2$ ✓
$x=y$, $y\neq z$, $x\neq z$	1	0	1	$1\leq 1$ ✓
$x\neq y$, $y\neq z$, $x=z$	0	1	1	$0\leq 2$ ✓
$x\neq y$, $y=z$, $x\neq z$	1	1	0	$1\leq 1$ ✓
$x=y=z$	0	0	0	$0\leq 0$ ✓

8) <u>Metrik der französischen Eisenbahn</u>

$X=\mathbb{R}^2$, $d(x,y)=\begin{cases} d_2(x,y), & x,y \text{ auf ein Ursprungsgerade}\\ d_2(x,0)+d_2(y,0), & \text{sonst}\end{cases}$



Beweis: Übung

9) Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y\subset X$ eine Teilmenge. Dann ist $d|_{Y\times Y}: Y\times Y\to\mathbb{R}$ eine Metrik auf Y, die sog. <u>induzierte Metrik</u>.

2.2.3 Def. (Skalarprodukt)

Sei V ein K-Vektorraum ($K=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Eine Abbildung $V\times V\ni(v,w)\longmapsto\langle v,w\rangle\in K$ heißt Skalarprodukt, falls gilt:

(S1) Die Abbildung $V\ni v\longmapsto\langle v,w\rangle\in K$ ist K-linear für alle $w\in V$. (Linearität)

(S2) $\langle v,w\rangle=\overline{\langle w,v\rangle}$ $\forall v,w\in V$, (symmetrisch, hermitisch)

(S3) $\langle v,v\rangle>0$ $\forall v\in V\setminus\{0\}$ (positiv definit)

Bemerkung: Das Skalarprodukt ist (konjugiert) linear in der zweiten Komponente: Seien $\lambda,\mu\in K$, $v,w\in V$

$$\langle v,\lambda w_1+\mu w_2\rangle\overset{(S2)}{=}\overline{\langle\lambda w_1+\mu w_2,v\rangle}$$
$$\overset{(S1)}{=}\overline{\lambda\langle w_1,v\rangle+\mu\langle w_2,v\rangle}=\overline{\lambda}\,\overline{\langle w_1,v\rangle}+\overline{\mu}\,\overline{\langle w_2,v\rangle}$$
$$\overset{(S2)}{=}\overline{\lambda}\langle v,w_1\rangle+\overline{\mu}\langle v,w_2\rangle$$

Deswegen ist ein Skalarprodukt eine positiv definite symmetrische Bilinearform, wenn $K=\mathbb{R}$, oder eine positiv definite hermitische Sesquilinearform, wenn $K=\mathbb{C}$.

2.2.4 Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ mit $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i$
- $\mathbb{C}^n$ mit $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$
- $C^0([a,b],\mathbb{C})$ mit $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

2.2.5 Satz Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Betrachte $\|x\|:=\sqrt{\langle x,x\rangle}$

a) Für alle $x,y\in V$ gilt $|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\cdot\|y\|$
(Schwarzsche Ungleichung)
Die Gleichheit gilt genau dann, wenn x,y linear abhängig sind.

b) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf V.

Beweis: a) Fall $y=0$ ist trivial. Sei $y \neq 0$, dann ist auch $\|y\| \neq 0$ wegen (S3).

$$0 \leq \left\| x - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} y \right\|^2 \overset{\text{Def.}}{=} \left\langle x - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} y, x - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} y \right\rangle$$

$$\overset{S1}{=} \langle x,x\rangle - \left\langle x, \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} y\right\rangle - \left\langle \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} y, x\right\rangle + \left\langle \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} y, \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} y\right\rangle$$

$$\overset{S1,S2}{=} \langle x,x\rangle - \frac{\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} - \frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\|y\|^2} + \frac{\langle x,y\rangle\overline{\langle x,y\rangle}}{\|y\|^4}\langle y,y\rangle$$

$$\overset{S2}{=} \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\|y\|^2}}_{>0}\left(\|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x,y\rangle|^2\right)$$

$$\Rightarrow \|x\|^2\|y\|^2 \geq |\langle x,y\rangle|^2 \overset{\text{all pos.}}{\Longrightarrow} |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|.$$

„$=0$" gilt nach (S3) genau dann, wenn

$$x - \underbrace{\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}}_{\in K} y = 0,$$ d.h. x und y sind linear abhängig ■

2.2.6 Def (Konvergenz, Grenzwert, Cauchy-Folge)

Sei (X,d) ein metrischer Raum:

a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt konvergent, falls

$$\exists x\in X: \forall \varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon): d(x_n,x)<\varepsilon \quad \forall n\geq n_0(\varepsilon)$$

x wird Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt, in Zeichen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

b) Eine Folge heißt Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon): \quad d(x_n,x_m)<\varepsilon \quad \forall m,n\geq n_0(\varepsilon)$$

Bemerkung:

i) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt:

Ann.: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ und $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

$$\Rightarrow d(x,y) \overset{(M3)}{\leq} d(x,x_n) + d(x_n,y) \xrightarrow[n\to\infty]{(M3)} 0+0=0$$

$$\Rightarrow d(x,y)=0 \overset{M1}{\Longrightarrow} x=y$$

ii) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Sei $\varepsilon > 0$ bel. aber fest.

$\exists n: d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n(\varepsilon)$, da $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) \overset{(M3)}{\leq} d(x_n, x) + d(x, x_m)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m \geq n(\varepsilon)$$

<u>2.2.7 Beispiele</u>

i) Konvergenz in $(\mathbb{R}, d_2)$ und $(\mathbb{C}, d_2)$ stimmt mit der aus Analysis I bekannten Definition überein

ii) Sei $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ eine Folge:
x^i konvergiert in $(\mathbb{R}^n, d_2)$ bzw. $(\mathbb{C}^n, d_2)$ genau dann, wenn für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ die Koordinatenfolge $(x^i_k)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
Beweis: Übungsaufgabe

iii) Konvergenz in $(B(D), \|\cdot\|_D)$ bedeutet gleichmäßige Konvergenz der Funktionen.

<u>2.2.8 Def. (vollständig, Banach- & Hilbertraum)</u>

Ein metrischer Raum (X, d) heißt <u>vollständig</u>, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert. Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt <u>Banachraum</u>, wenn V zusammen mit der Norm-Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist. Ein Skalarproduktraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt <u>Hilbertraum</u>, wenn V mit der induzierten Norm ein Banachraum ist.

<u>Beispiele:</u> 1) $(\mathbb{R}, d_2)$ und $(\mathbb{C}, d_2)$ sind vollständig

2) $(\mathbb{Q}, d_2)$ ist <u>nicht</u> vollständig

$x_n := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, $x_0 = 2$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchfolge in $\mathbb{Q}$, aber der Grenzwert liegt nicht in $\mathbb{Q}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge in $\mathbb{Q}$ somit <u>nicht</u> konvergent.

3) $(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist vollständig

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ist ein Banachraum

$(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein Hilbertraum

4) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Dann ist (I, d_2) vollständig.

5) $(B(D), d_D)$ ist vollständig, dh $(B(D), \|\cdot\|_D)$ ist ein Banachraum (Übung)

6) $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_{[a,b]})$ ist ein Banachraum

7) $(C^0([a,b])$ versehen mit der Norm

$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$ ist <u>kein</u> Banachraum.