2.05.2016

**2.2.9 Definition** Eine Menge $A \subset (X, d)$ heißt beschränkt $:\Leftrightarrow \exists x_0 \in X\ \exists M = M(x_0)\ \forall x \in A: d(x_0, x) \leq M \Leftrightarrow \forall x_0 \in X\ \exists M = M(x_0)\ \forall x \in A: d(x_0, x) \leq M$

**Bemerkung** (a) Ist $(V, \|\cdot\|)$ NVR, wir sagen, dass $A \subset V$ beschränkt ist, falls $A$ beschränkt bzgl. der Norm-Metrik $d(x,y) = \|x-y\|$ ist. Wähle $x_0 = 0$ in 2.2.9 $\leadsto$ $A \subset (V, \|\cdot\|)$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists M \geq 0\ \forall x \in A: \|x\| \leq M$.

(b) $A \subset (\mathbb{R}, d_2) = (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists M \geq 0\ \forall x \in A: |x| \leq M \Leftrightarrow M$ beschränkt im Sinne von Analysis I.

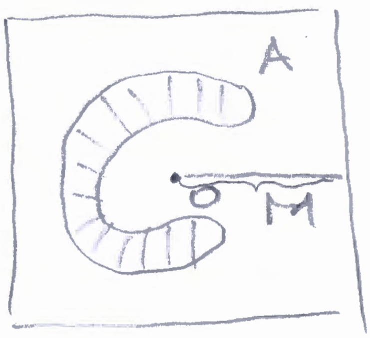
(c) $A \subset (\mathbb{R}^n, d_2) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ist beschränkt $\Leftrightarrow$

$$\exists M \geq 0\ \forall x \in A: \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq M \Leftrightarrow$$

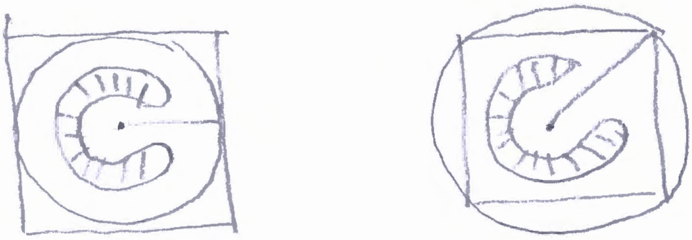
$$\exists M' \geq 0\ \forall x \in A: \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq M' \Leftrightarrow$$

$$A \subset (\mathbb{R}^n, d_\infty) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \text{ beschränkt}$$

Geometrisch: $A$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists$ Kugel mit Zentrum $0$, die $A$ enthält $\Leftrightarrow \exists$ Quader zentriert in $0$, der $A$ enthält

Die Tatsache, dass Beschränktheit für $d_2$ und $d_\infty$ äquivalent ist kann man durch folgenden Bilder verdeutlichen:



<u>2.2.10 Satz (Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$)</u>

Jede beschränkte Folge in $(\mathbb{R}^n, d_2)$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

<u>Beweis</u> $(n=2)$. Sei $z_k = (x_k, y_k)$ eine beschränkte Folge in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ $\Leftrightarrow$ $z_k$ ist beschränkt in $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ $\Leftrightarrow \exists M \geq 0 \ \forall k \ |x_k| \leq M, |y_k| \leq M \Leftrightarrow x_k, y_k$ beschränkt in $\mathbb{R}$. Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$ $\leadsto \exists$ Teilfolge $(x_{k_\ell})_\ell$ von $(x_k)$ mit $x_{k_\ell} \to x$, $\ell \to \infty$.

Die Teilfolge $(y_{k_\ell})_\ell$ ist beschränkt, also Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$ impliziert wieder, dass $(y_{k_\ell})$ eine konvergente Teilfolge hat $(y_{k_{\ell_j}})_j$, $y_{k_{\ell_j}} \to y$, $j \to \infty$.

Insgesamt $(x_{k_{\ell_j}}, y_{k_{\ell_j}}) \to (x, y)$, $j \to \infty$. ∎

<u>2.2.11 Definition</u> Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ auf einem NVR $V$ heißen äquivalent $:\Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0 \ \forall x \in V$: $c_1 \|x\| \leq \|x\|_* \leq c_2 \|x\|$. Schreibweise: $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_*$.

Ist $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_*$ so gilt: $(x_k)_k$ konvergent (bzw. Cauchy) bzgl $\|\cdot\|$ $\Leftrightarrow$ $(x_k)$ konvergent (bzw. Cauchy) bzgl. $\|\cdot\|_*$.

<u>Bemerkung</u> Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent!

**2.2.12. Def.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein NVR. Eine Reihe $\sum_{k\geq 0} x_k$ in $V$ besteht aus ein Paar Folgen $(x_k)_{k\geq 0}$, $(s_k)_{k\geq 0}$ in $V$, wobei $s_k = x_0 + \ldots + x_k$ (Partialsummen).
Wir sagen, dass die Reihe konvergiert, falls $(s_k)_{k\geq 0}$ in $(V, \|\cdot\|)$ konvergiert; dann heißt $s = \lim_{k\to\infty} s_k \in V$ die Summe der Reihe und wir schreiben $s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$.
Die Reihe heißt absolut konvergent, falls $\sum_{k\geq 0} \|x_k\|$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

**2.2.13 Satz** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann gilt:

(i) $\sum_{k\geq 0} x_k$ konvergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon > 0\ \forall m > \ell \geq k_\varepsilon$: $\|x_{\ell+1} + \ldots + x_m\| < \varepsilon$ (Cauchy-Kriterium)

(ii) $\sum_{k\geq 0} x_k$ ist konvergent, falls sie absolut konvergent ist.

**Beweis** (i) $\sum x_k$ konvergent $:\Leftrightarrow (s_k)$ konvergent $\Leftrightarrow (s_k)$ Cauchy-Folge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon\ \forall m > \ell \geq k_\varepsilon$: $\|s_m - s_\ell\| < \varepsilon$. Ferner $s_m - s_\ell = x_m + \ldots + x_{\ell+1}$.

(ii) $\sum \|x_k\|$ konvergent $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon\ \forall m > \ell \geq k_\varepsilon$: $\|x_m\| + \ldots + \|x_{\ell+1}\| < \varepsilon$. Dreiecksungleichung $\rightsquigarrow$ $\|x_m + \ldots + x_{\ell+1}\| \leq \|x_m\| + \ldots + \|x_{\ell+1}\| < \varepsilon$. ▨

**2.2.14 Definition** Eine Banachalgebra ist ein Vektorraum $V$ (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit einem Produkt $\cdot : V \times V \to V$ und einer Norm $\|\cdot\|$, so dass
(i) $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, (ii) $(V, +, \cdot)$ eine assoziative Algebra ist, (iii) die Norm ist sub-multiplikativ: $\forall x, y \in V$ gilt $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Beispiele (i) $(\mathcal{B}(D), \|\cdot\|_D)$, die Algebra der beschränkten Funktionen von $D \subset \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, versehen mit der sup-Norm. Die Multiplikation ist die Multiplikation der Funktionen. Analog $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_{[a,b]})$, die Algebra der stetigen Fkten von $[a,b]$ in $\mathbb{C}$, mit der sup-Norm.
(c) $(M_{n\times n}(K), \|\cdot\|_2)$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, wobei $\|A\|_2 := \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$
(siehe Aufgabe 8.8.4 in Skript)

**2.2.15 Satz** Sei $(V, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra
(i) Exponentialreihe: Für alle $x \in V$ konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$. Ihre Summe wird $e^x$ bezeichnet. Es gilt $\|e^x\| \leq e^{\|x\|}$.

(ii) Geometrische Reihe: Für alle $x \in V$, $\|x\| < 1$, konvergiert $\sum_{k\geq 0} x^k$ und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (e - x)^{-1}$, wobei $e \in V$ das Einselement ist.

**Beweis** Die Reihen sind absolut konvergent (Exponentialreihe $\sum \frac{1}{k!}\|x\|^k$ und geom. Reihe $\sum \|x\|^k$)

Außerdem $(e-x)(e+x+\ldots+x^k) = e - x^{k+1}$ und durch Limesübergang $k\to\infty$ folgt $(e-x)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = e$. $\blacksquare$

**Übung** $x_k \to x$, $k\to\infty$ impliziert $x_k y \to xy$, $k\to\infty$.

**Beispiele**

- $A\in M_{n\times n}(K) \rightsquigarrow e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \in M_{n\times n}(K)$
- $\|A\|_2 < 1 \rightsquigarrow (I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

9.05.2016

## 2.3. Topologie eines metrischen Raumes

**2.3.1 Definition** Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Sei $a\in X$, $r>0$. Wir definieren:

$B_r(a) = \{x\in X : d(x,a) < r\}$, die offene Kugel mit Mittelpkt $a$ und Radius $r$

$\overline{B}_r(a) = \{x\in X : d(x,a)\leq r\}$, die abgeschlossene —"—

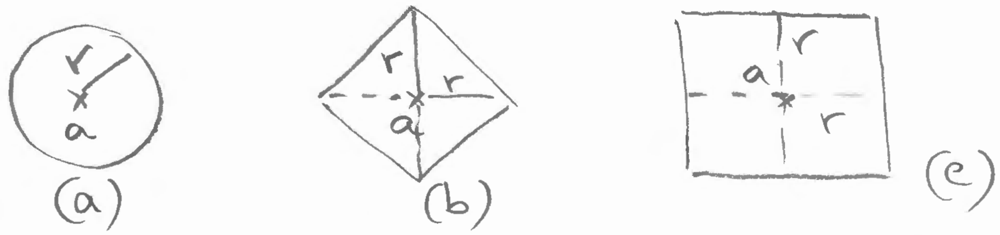
$S_r(a) = \{x\in X : d(x,a) = r\}$, die Sphäre —"—

**Beispiele** In $(\mathbb{R}, d_2)$, $d_2(x,y) = |x-y|$: $B_r(a) = (a-r, a+r)$, $\overline{B}_r(a) = [a-r, a+r]$, $S_r(a) = \{a-r, a+r\}$.

(a) In $(\mathbb{R}^2, d_2)$: $B_r(a) = \{(x_1,x_2) : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\}$

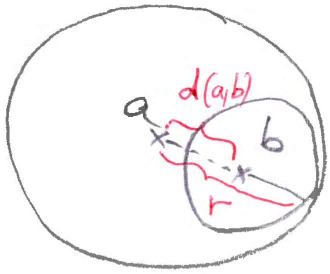
(b) In $(\mathbb{R}^2, d_1)$: $B_r(a) = \{(x_1,x_2) : |x_1-a_1| + |x_2-a_2| < r\}$

(c) In $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$: $B_r(a) = \{(x_1,x_2) : \max\{|x_1-a_1|, |x_2-a_2|\} < r\}$



**2.3.2 Definition** $(X,d)$ met. Raum, $U \subset X$ heißt **offen**, wenn $\forall x \in U\ \exists r = r_x > 0 : B_r(x) \subset U$.
$F \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus F$ offen ist

**Beispiele** Offene (bzw. abgeschlossene) Intervalle in $\mathbb{R}$ sind offen (abgeschlossen) in $(\mathbb{R}, d_2)$.
$B_r(a) \subset X$ ist offen: zu $b \in B_r(a)$ gilt $B_{r-d(a,b)}(b) \subset$
$\subset B_r(a)$




**2.3.3 Satz** (a) $X, \emptyset$ sind offen. Vereinigung beliebig vieler offenen Mengen ist offen. Durchschnitt endlich vieler offenen Mengen ist offen.
(b) $X, \emptyset$ sind abgeschlossen. Vereinigung endlich vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen. Durchschnitt beliebig vieler abgeschl. Mengen ist abgeschlossen.

**Beweis** Zu Durchschnitt in (a): $r < R \rightsquigarrow B_r(a) \subset B_R(a)$ und $\bigcap_{j=1}^{l} B_{r_j}(a) = B_r(a)$, mit $r = \min\{r_j : 1 \le j \le l\}$.
Sind $U_1, \dots, U_l$ offen, $x \in U_1 \cap \dots \cap U_l \rightsquigarrow \forall j \in \{1, \dots, l\}$
$\exists r_j > 0 : B_{r_j}(x) \subset U_j \rightsquigarrow B_r(x) = \bigcap B_{r_j}(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_l$
mit $r = \min r_j$.
Zu (b): Regel von de Morgan: $C(\bigcap_\alpha F_\alpha) = \bigcup_\alpha CF_\alpha$,
$C(\bigcap_\alpha F_\alpha) = \bigcup_\alpha CF_\alpha$ wobei $CA := X \setminus A$. ▨

**2.3.4 Satz** $F \subset (X, d)$ abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ Grenzwert jeder konvergenten Folge $(x_k)$ in $X$ mit $x_k \in F$ liegt in $F$.

Beweis „$\Rightarrow$" Sei $F$ abgeschlossen, $x_k \in F$, $x_k \to x \in X$

z.z. $x \in F$. Angenommen $x \notin F \leadsto x \in X \setminus F$ offen $\leadsto \exists r > 0$ $B_r(x) \subset X \setminus F \leadsto \exists k_\varepsilon\ \forall k \geq k_\varepsilon\ x_k \in B_r(x) \subset X \setminus F$ ↯

„$\Leftarrow$" Angenommen $F$ nicht abgeschl. $\leadsto$ $X \setminus F$ nicht offen $\leadsto \exists x \in X \setminus F\ \forall n \geq 1$ $\exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap F \leadsto x_n \to x \notin F$ ↯ $\blacksquare$

**2.3.5 Definition.** Sei $X$ eine Menge. Eine Topologie auf $X$ ist eine Familie $\mathcal{O}$ von Teilmengen von $X$ mit den Eigenschaften:

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$ (2) Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ gehört zu $\mathcal{O}$.

(3) Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ gehört zu $\mathcal{O}$.

Das Paar $(X, \mathcal{O})$ heisst topologisher Raum. Eine Menge $U \subset X$ heißt offen, falls $U \in \mathcal{O}$. Eine Menge $F \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus F$ offen ist.

**2.3.6 Beispiele** (1) Ist $(X, d)$ metrischer Raum so ist $\mathcal{O} = \mathcal{O}(d) = \{U \subset X : U \text{ offen bzgl. } d\}$ (siehe Def. 2.3.2) eine Topologie auf $X$, genannt die Topologie induziert von $d$. Dies folgt aus Satz 2.3.3.

(2) Seien $\|\cdot\|, \|\cdot\|_*$ zwei Normen auf $V$. Dann gilt
$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_* \Leftrightarrow$ die zugehörigen Metriken induzieren dieselbe Topologie

(3) Ist $V = \mathbb{R}^n$, so sind alle Normen äquivalent. Die zu beliebigen Normen gehörige Topologie heißt Standardtopologie von $\mathbb{R}^n$.

2.3.7 Definition Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $a \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt Umgebung von $a$, wenn es eine offene Menge $V \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in V \subset U$
Die Familie aller Umgebungen von $a$ wird $\mathcal{U}_a$ bezeichnet.
Für einen metrischen Raum $(X, d)$: $U \in \mathcal{U}_a \Leftrightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset U$.

2.3.8 Bemerkung (i) Der Durchschnitt endlich vieler Umgebung von $a$ ist wieder eine Umgb von $a$.
(ii) $U \in \mathcal{U}_a$, $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_a$
(iii) $U$ offen $\Leftrightarrow$ $U$ ist Umgebung jedes seiner Punkte

2.3.9 Definition Sei $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum, $A \subset X$.
Ein Punkt $x \in X$ heißt:
(i) innerer Punkt von $A$ $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{U}_a$
(ii) Berührpunkt von $A$ $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_a: U \cap A \neq \emptyset$
(iii) Randpunkt von $A$ $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_a: U \cap A \neq \emptyset, U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$
(iv) Häufungspunkt von $A$ $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_a: U \cap A$ unendlich
(v) isolierter Punkt von $A$ $:\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_a: U \cap A = \{a\}$
(vi) äußerer Punkt von $A$ $:\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_a: U \cap A = \emptyset$.