2.3.10 Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$. Wir führen ein:

(i) $\mathring{A} = \{x \in X : x \text{ innerer Punkt von } A\}$, das Innere von A.

(ii) $\overline{A} = \{x \in X : x \text{ Berührpunkt von } A\}$, der Abschluss oder abgeschlossene Hülle von A

(iii) $\partial A = \{x \in A : x \text{ Randpunkt von } A\}$, der Rand von A

(iv) $A' = \{x \in A : x \text{ Häufungspunkt von } A\}$.

2.3.11 Satz (1) $\mathring{A} = \bigcup\{V \text{ offen} : V \subset A\}$, d.h. $\mathring{A}$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist. Insb. ist $\mathring{A}$ offen.

(2) $\overline{A} = \bigcap\{F \text{ abgeschlossen} : A \subset F\}$ d.h. $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlosse Menge, die A enthält. Insb. ist $\overline{A}$ abgeschl.

(3) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$; ∂A ist abgeschlossen.

(4) $\mathring{A} = A \setminus \partial A$, $\overline{A} = A \cup \partial A = A \cup A' = \mathring{A} \sqcup \partial A$

(wobei $\sqcup$ disjunkte Vereinigung bedeutet)

Beweis (1) $x \in \mathring{A} :\Leftrightarrow \exists V \text{ offen}, V \subset A, x \in A \Leftrightarrow$
$x \in \bigcup\{V \text{ offen} : V \subset A\}$

(2)
$$X \setminus \overline{A} = \{x \in X : x \text{ kein Berührpunkt von } A\} = \{x \in X : \exists V \text{ offen}, x \in V \subset X \setminus A\} = \mathring{\overbrace{X \setminus A}}$$

$$X \setminus \bigcap\{F \text{ abgeschl.} : A \subset F\} \overset{\text{de Morgan}}{=} \bigcup\{\underbrace{X \setminus F}_{V} : F \text{ abgeschl.}, A \subset F\}$$
$$= \bigcup\{V : V \subset X \setminus A, V \text{ offen}\} \overset{(1)}{=} \mathring{\overbrace{X \setminus A}}.$$

$\blacksquare$

2.3.12 Definition (i) $(X,\mathcal{O})$ topologischer Raum, $A\subset X$. Dann ist $\mathcal{O}_A=\{U\cap A;\ U\in\mathcal{O}\}$ eine Topologie auf A, genannt Teilraumtopologie von A.

(ii) $(X_1,\mathcal{O}_1),\dots,(X_n,\mathcal{O}_n)$ topologische Räume. Dann ist

$$\mathcal{O}:=\{U\subset X_1\times\dots\times X_n:\ \forall x\in U\ \exists U_i\in\mathcal{O}_i\ i=1,\dots,n, \text{ mit } x\in U_1\times\dots\times U_n\subset U\}$$

eine Topologie auf $X_1\times\dots\times X_n$, genannt Produkttopologie

Beispiele (i) Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ ist die Teilraumtopologie auf $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$

(ii) Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ ist die Produkttopologie der Standardtopologien von $\mathbb{R}$.

2.4. Stetige Abbildungen

2.4.1 Definition Seien X, Y top. Räume, $f: X\to Y$ heisst stetig in $a\in X$, wenn zu jeder Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a gibt, mit $f(U)\subset V$.

f heisst stetig, wenn f in allen $a\in X$ stetig ist.

f heisst Homömorphismus, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} stetig sind.

2.4.2 Beispiele (i) Konstante Abbildungen und die Identität $Id: X\to X$ sind stetig.

(ii) $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ heißt Lipschitz-stetig falls eine Konstante $L\geq 0$ existiert mit

$$d_Y(f(x_1),f(x_2))\leq L\, d_X(x_1,x_2)\quad,\ x_1,x_2\in X.$$

L heißt Lipschitz-Konstante. Eine Lipschitz-stetige Funktion ist auch stetig. Dies folgt leicht mit dem ε-δ Kriterium (siehe unten).
f heißt <u>Isometrie</u> falls $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.

(iii) $X_1, \dots, X_n$ top. Räume, $X_1 \times \dots \times X_n$ mit der Produkttop.
$\rightsquigarrow pr_i : X_1 \times \dots \times X_n \to X_i$, $pr_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ ist stetig: ist $V \subset X_i$ offen, $x \in V$, so ist $X_1 \times \dots \times V \times \dots \times X_n$ offen in $X_1 \times \dots \times X_n$ nach Def der Produkttop. und $pr_i(X_1 \times \dots \times V \times \dots \times X_n) = V$.

(iv) Sei $\mathbb{C}$ versehen mit der Standardtop (gegeben durch die Euklidische Metrik $d(z,w) = |z-w|$). Sei $D \subset \mathbb{C}$ versehen mit der Teilraumtop. Dann ist $f : D \to \mathbb{C}$ stetig im Sinne von Def 2.4.1 gdw stetig nach Analysis I ist.

(v) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Homöomorphismus, da exp und $\exp^{-1} = \log$ stetig sind.
$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ Homöo, da tan und $\tan^{-1} = \arctan$ stetig sind.

(vi) Die Polarkoordinatenabbildung $P : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x \geq 0, y = 0\}$, $P(r, \vartheta) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ ist ein Homöomorphismus.

<u>2.4.3 Satz</u> Seien $f, g : X \to \mathbb{C}$ stetig in $a \in X$, sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt: (i) $f+g$, $f \cdot g$, λf sind stetig in a.
(ii) Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a.

<u>Beweis</u> Vorbemerkung: Sei $h: X \to \mathbb{C}$. Dann ist h in a stetig $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists U \subset X$ Umgb von a mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für $x \in U$.

In der Tat, V ist Umgb von $h(a) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(h(a)) \subset V$ und $h(U) \subset B_\varepsilon(f(a)) \Leftrightarrow \forall x \in U : |h(x) - h(a)| < \varepsilon$

- $f+g$ stetig in a $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists U$ Umgb von a $\forall x \in U$
  $|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| < \varepsilon$

  f stetig in a $\Rightarrow$ $\exists U_1$ Umgb von a $\forall x \in U_1 : |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$
  g stetig in a $\Rightarrow$ $\exists U_2$ Umgb von a $\forall x \in U_2 : |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$
  $U := U_1 \cap U_2$ ist Umgeb von a und für alle $x \in U_1 \cap U_2$
  $$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \le |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $\eta > 0$ (das wir später wählen). Zu $\eta > 0$ gibt es U_1, U_2 Umgeb von a mit
  $x \in U_1 \rightsquigarrow |f(x) - f(a)| < \eta$, $x \in U_2 \rightsquigarrow |g(x) - g(a)| < \eta$
  $$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| = |f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)|$$
  $$\le |f(x) - f(a)|\,|g(x)| + |f(a)|\,|g(x) - g(a)|$$
  $$\le \eta |g(x)| + \eta |f(a)| \le \eta(|g(a)| + \eta) + \eta |f(a)|, \quad x \in U_1 \cap U_2$$
  Wähle nun $\eta > 0$ und damit U_1, U_2, so dass letzteres $< \varepsilon$ ist (hier benutzt man die Stetigkeit in $\mathbb{R}$)

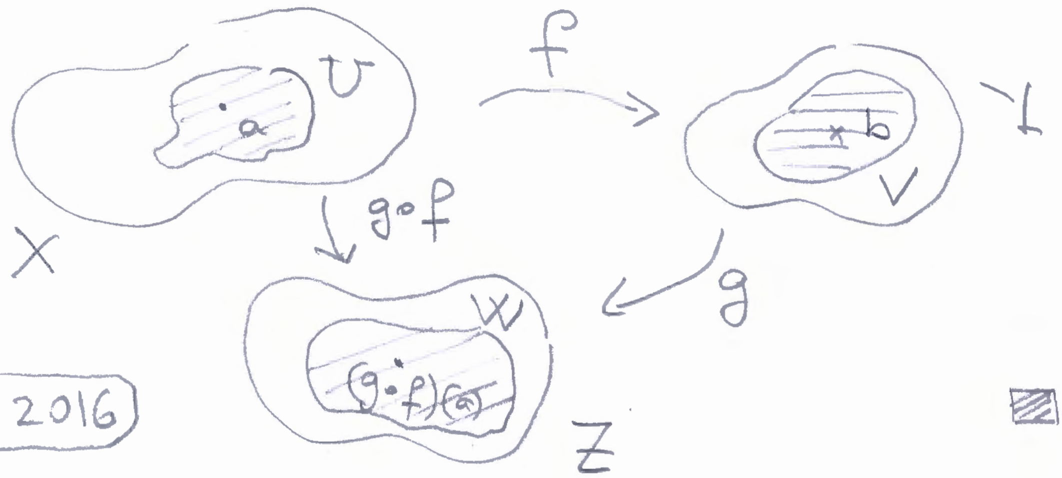
2.4.4. Satz Seien X, Y, Z topologische Räume, $f: X \to Y$ stetig in $a \in X$, $g: Y \to Z$ stetig in $b = f(a) \in Y$. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f: X \to Z$ stetig in a.

Beweis Sei W eine Umgebung von $(g \circ f)(a) = g(b)$

g stetig in $b \Rightarrow \exists V$ Umgb von b in Y mit $g(V) \subset W$

f stetig in $a \Rightarrow \exists U$ Umgb von a in X mit $f(U) \subset V$

$\rightsquigarrow (g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$.



∎

$\boxed{24.06.2016}$

Beispiele (i) Sei $f: X \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$

f stetig in $a \in X \Leftrightarrow f_1, \dots, f_m$ stetig in $a \in X$

„$\Rightarrow$" $pr_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $pr_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ (Projektion auf der i-te Achse) ist stetig für alle $i = 1, \dots, m$.

Laut Satz 2.4.4, ist auch $f_i := pr_i \circ f$ stetig in a.

„$\Leftarrow$" Schreibe $f = (f_1, \dots, f_m) = (f_1, 0, \dots, 0) + (0, f_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, f_m)$ und jeder Summand ist stetig in $a \in X$.

∎

Sei z.B. $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

P heißt Polarkoordinatenabbildung.

$(r,\theta) \mapsto r\cos\theta$, $(r,\theta) \mapsto r\sin\theta$ sind stetig also ist auch P stetig

(ii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

f ist eine rationale Funktion $f = \frac{P}{Q}$, wobei P, Q polynome in $\mathbb{R}^2$ sind. Daher ist f stetig auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : Q(x,y) \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, da $Q(x,y) = x^2+y^2$. Stetigkeit in $(0,0)$: sei $\varepsilon > 0$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = \frac{|xy^3|}{x^2+y^4} \leq \frac{|x| \cdot |y|^3}{2|x| \cdot |y|^2} = \frac{|y|}{2}$$

$$\left(\text{AGM}: x^2+y^4 \geq 2\sqrt{|x|^2 |y|^4} = 2|x||y|^2.\right)$$

Wähle $(x,y) \in U = B^\infty_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

$(x,y) \in U \rightsquigarrow |y| < \varepsilon \rightsquigarrow |f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{|y|}{2} < \varepsilon$

$\rightsquigarrow f(x,y) \in \underbrace{(-\varepsilon, \varepsilon)}_{\text{gegebene Umgebung von } 0 = f(0,0).}$ ∎

(iii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_a(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ a, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

mit $a \in \mathbb{R}$.

f_a ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ aber nicht stetig in $(0,0)$.

Betrachte die Umgebung $V = (c-1, c+1) \subset \mathbb{R}$ von c. Sei $b \in \mathbb{R}$ mit $\frac{2b}{1+b^2} \in \mathbb{R} \setminus (c-1, c+1)$. Für $\delta > 0$ gegeben, wähle $t \in \mathbb{R}$ mit $\max\{|t|, |tb|\} < \delta$. Dann gilt $f_c(t, tb) = \frac{2t \cdot tb}{t^2 + t^2 b^2} = \frac{2b}{1+b^2}$.

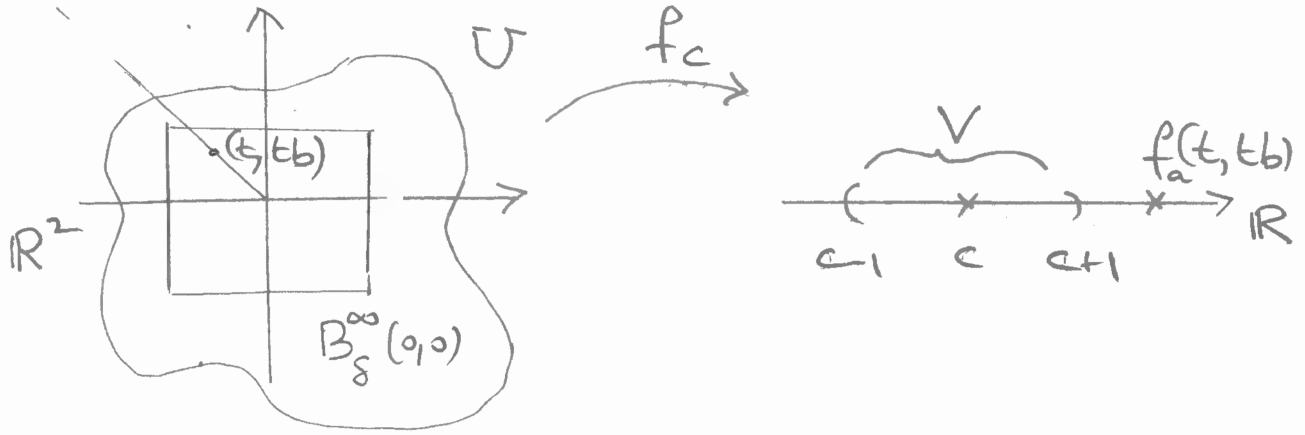
Für jede Umgebung U von $(0,0)$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$B_\delta^\infty(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < \delta\} \subset U.$$

Wir haben also gezeigt:

$\exists\, V$ Umgebung von c $\forall\, U$ Umgebung von $(0,0)$ $\exists\, (x,y) \in U$ mit $f(x,y) \notin V$

Dies zeigt, dass f_c ist nicht stetig in $(0,0)$.



<u>2.4.5 Satz</u> Seien (X,d), (Y,d) metrische Räume, $a \in X$. Äquivalent: (i) f stetig in a (ii) (ε-δ Kriterium)
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ d(x,a) < \delta : d(f(x), f(a)) < \varepsilon$

(iii) (Folgenkriterium) $\forall (x_k)_k,\ x_k \to a,\ k \to \infty$:
$f(x_k) \to f(a),\ k \to \infty$.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\varepsilon > 0$. Betrachte $V = B_\varepsilon(f(a))$.
f stetig in $a \overset{\text{Def}}{\Longrightarrow} \exists\, U$ Umgeb von a mit $f(U) \subset V$.
U Umgeb von $a :\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(a) \subset U$
Es folgt $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ d.h.

$$\underbrace{x \in B_\delta(a)}_{\Leftrightarrow\ d(x,a) < \delta} \Longrightarrow \underbrace{f(x) \in B_\varepsilon(f(a))}_{\Leftrightarrow\ d(f(x), f(a)) < \varepsilon}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle dazu $\delta > 0$ wie in (ii).

$x_k \to a,\ k \to \infty \Rightarrow \exists k_0\ \forall k \geq k_0\ d(x_k, a) < \delta$

$\Rightarrow \exists k_0\ \forall k \geq k_0\ d(f(x_k), f(a)) < \varepsilon$

Dies zeigt, dass $f(x_k) \to f(a),\ k \to \infty$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen f wäre nicht stetig in a. Dann $\exists V$ Umgeb von $f(a)$ $\forall U$ Umgeb von a: $f(U) \not\subset V$.

Wähle $U = B_{1/k}(a)$ und $x_k \in B_{1/k}(a)$ mit $f(x_k) \notin V$.

Dann gilt $x_k \to a$ aber $f(x_k) \not\to f(a),\ k \to \infty$ ↯ ▨

Wir können nun das Beispiel f_c vorher mit Hilfe des Folgenkriteriums behandeln. Sei $x_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}),\ k \in \mathbb{N}$.

Dann $x_k \to (0,0),\ k \to \infty$ und $f(x_k) = \dfrac{2\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = 1$, für alle $k \in \mathbb{N}$

Analog $y_k = (\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}) \to (0,0)$ und $f(y_k) = -1$, für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wäre f_c in $(0,0)$ stetig, so würde $f(x_k) \to c$, $f(y_k) \to c$,

$k \to \infty$ also $1 = c = -1$ ↯.