2.4.6 Satz (globale Charakterisierung der Stetigkeit)
X, Y topologische Räume, $f: X \to Y$ Abbildung. Äquiv:
(i) f stetig (auf X) (ii) $\forall V \subset Y$ offen: $f^{-1}(V) \subset X$ offen
(iii) $\forall F \subset Y$ abgeschlossen: $f^{-1}(F) \subset X$ abgeschlossen

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $V \subset Y$ offen. Für $x \in f^{-1}(V)$ gilt $f(x) \in V$ und V ist eine Umgebung von $f(x)$.
f stetig in $x \rightsquigarrow \exists\, U_x$ offene Umgb von x in X mit $f(U_x) \subset V$ also $U_x \subset f^{-1}(V)$. Daraus folgt $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$ und U_x offen $\rightsquigarrow f^{-1}(V)$ offen.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $x \in X$ und V offene Umgeb von $f(x)$. Dann ist $U := f^{-1}(V)$ offen und Umgeb von x mit
$f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$.

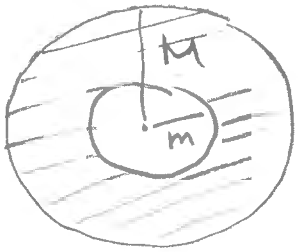
(ii) $\Rightarrow$ (iii) $F \subset Y$ abgeschlossen $\Leftrightarrow Y \setminus F$ offen
$\rightsquigarrow f^{-1}(Y \setminus F) \subset X$ offen. Aber $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$
$\rightsquigarrow f^{-1}(F)$ abgeschlossen in X

(iii) $\Rightarrow$ (ii) analog zu (ii) $\Rightarrow$ (iii). ∎

2.4.7 Folgerung Sei $f: X \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Ist I offen (bzw. abgeschlossen), so ist $f^{-1}(I)$ offen (bzw. abgeschlossen).

Beispiel $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$ stetig
$\rightsquigarrow S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\} = f^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen
(Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$)

Genauso $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : m \leq x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 \leq M\} = f^{-1}([m, M])$ abgeschlossen, $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : m < x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 < M\} = f^{-1}((m, M))$ ist offen



2.4.8 Definition Seien X, Y top. Räume, $A \subset X$ und $a \in X$ ein Häufungspunkt von A. Eine Funktion $f : X \to Y$ hat in a einen GW $b \in Y$, wenn es zu jeder Umgeb V von b eine Umgeb U von a exististiert, mit $f(A \cap U \setminus \{a\}) \subset V$.
(a wird ausgeschlossen, da nur das Verhalten von f in der Nähe von a und nicht in a, der eventuell nicht in A liegt, von Interesse ist.)

Schreibweise: $f(x) \to b, x \to a$ oder $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Ist $a \in A$ ein HP von A so gilt: f stetig in $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ist $a \in A$ kein HP (d.h. isolierter Punkt), so ist f stetig in a, wir sprechen von GW in a aber nicht.

2.4.9 Satz Seien X, Y metrische Räume. Äquivalent:

(i) $f(x) \to b, x \to a$ (ii) (ε-δ Kriterium) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ $\forall x \in A \setminus \{a\}$ $d(x, a) < \delta$: $d(f(x), b) < \varepsilon$

(iii) (Folgenkriterium) $\forall (x_k)_k$ $x_k \in A \setminus \{a\}$, $x_k \to a$, $k \to \infty$: $f(x_k) \to b$, $k \to \infty$.

Bsp $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} = 0$, $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ existiert nicht.

2.4.10 Satz Ist $Y = Y_1 \times \dots \times Y_m$ produkt von top. Räume und $f : A \to Y$, $f = (f_1, \dots, f_m)$. Dann

$\exists \lim_{x \to a} f(x) = b = (b_1, \dots, b_m) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \; \exists \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$

 02.06.2016

2.5 Kompaktheit

Wir möchten die folgende aus Analysis I bekannte Aussage beweisen:

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$, so existiert $c > 0$ mit $f(x) \geq c$ für alle $x \in [a,b]$.

(Beweis mit Ana I ?)

Wir versuchen nun so: f ist stetig in $x \in [a,b]$ $\leadsto$ $\exists$ Umgb $U_x = (x - r_x, x + r_x) \cap [a,b]$ von x mit $f(y) > \frac{f(x)}{2}$, $\forall y \in U_x$.

Die offenen Mengen $(U_x)_{x \in [a,b]}$ bilden eine offene Überdeckung von $[a,b]$. Gäbe es endlich viele davon $U_{x_1}, \dots, U_{x_k}$ mit $[a,b] \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$ so hätten wir für alle $x \in [a,b]$: $\exists i \in \{1, \dots, k\}$, $x \in U_{x_i}$ also

$f(x) > \frac{f(x_i)}{2} \geq \min\limits_{1 \leq j \leq k} \frac{f(x_j)}{2} =: c > 0$.

Die obige Eigenschaft ist tatsächlich wahr. Da solche Argumente sehr häufig sind, nehmen wir diese Eigenschaft als Definition eines wichtigen Begriffs.

Sei X eine Menge, $(V_i)_{i \in I}$ Familie von Teilmengen von X. (d.h. eine Abbildung $I \to \mathcal{P}(X)$, $i \mapsto V_i$). Setze

$\bigcup\limits_{i \in I} V_i = \{x \in X : \exists i \in I \text{ mit } x \in V_i\}$

$(V_i)_{i \in I}$ heißt **Überdeckung** von $A \subset X$ falls $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} V_i$

Ist X top Raum und V_i offen, so heißt $(V_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung.

2.5.1. Definition Ein topologischer Raum X heißt kompakt, wenn X die Heine Borel Überdeckungseigenschaft hat: aus jeder offenen Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von X endlich viele offenen Mengen $V_{i_1},\dots,V_{i_k}$ ausgewählt werden können, so dass $X = V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}$.
$\{V_{i_1},\dots,V_{i_k}\}$ ist auch eine offene Überdeckung. Wir sagen: jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.

Wir sagen, dass $K \subset X$ kompakt ist, falls K mit der Teilraumtopologie kompakt ist. K relativ kompakt $\Leftrightarrow \overline{K}$ kompakt

2.5.2. Definition Ein topologischer Raum X heißt folgenkompakt, wenn X die Bolzano-Weierstrass Eigenschaft hat: jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.
Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt folgenkompakt, falls K mit der Teilraumtopologie folgenkompakt ist ($\Leftrightarrow$ jede Folge in K hat eine Teilfolge die gegen ein Punkt in K konvergiert).

2.5.3 Satz Sei X ein metrischer Raum. Dann sind äquiv.
(i) X kompakt (ii) X folgenkompakt.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) Vorbemerkung Sei $(x_k)_k$ Folge in X.
Sei $p \in X$ ein HW von (x_k). Dann gilt: $\forall$ V offene Umgb von p ist $\{k \in \mathbb{N} : x_k \in V\}$ unendlich.
Angenommen es gibt (a_k) in X ohne HW. Dann gilt
$\forall x \in X \ \exists V_x$ offene Umgeb von x: $\{k \in \mathbb{N} : x_k \in V_x\}$ endlich
$(V_x)_{x\in X}$ offene Überdeckung von $X \rightsquigarrow V_{x_1},\dots,V_{x_j}$ Teilüberd.
Da für alle $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in X = V_{i_1} \cup \dots \cup X_{i_j} \rightsquigarrow$
$\mathbb{N} \subset \bigcup_{i=1}^{j} \{k \in \mathbb{N} : x_k \in V_{x_i}\} \rightsquigarrow \mathbb{N}$ endlich $\lightning$

2.5.4 Satz

$K \subset (X,d)$ folgenkompakt $\Rightarrow$ K abgeschlossen und beschränkt

Beweis Angenommen K ist nicht beschränkt.
Dann gibt es $x \in X$ und (x_k) Folge in K mit $d(x_k, x) \geq k$.
Also ist jede Teilfolge von (x_k) unbeschränkt also nicht konvergent. ↯

Sei $x \in \overline{K}$, also $\exists\, x_k \in K,\ x_k \to x,\ k \to \infty$.
Folgenkompaktheit von K $\rightsquigarrow \exists\, (x_{k_\ell})_\ell$ konvergent in K
mit $x_{k_\ell} \to y \in K,\ \ell \to \infty$. GW ist eindeutig $\rightsquigarrow x = y \in K$

2.4.5 Satz (Heine-Borel)

Betrachte $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Standardtopologie, $K \subset \mathbb{R}^n$.
Äquivalent: (i) K kompakt (ii) K folgenkompakt
(iii) K abgeschlossen & beschränkt

Beweis Es bleibt (iii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen. Angenommen K ist nicht kompakt (Heine-Borel Eigenschaft ist verletzt) also $\exists (V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K ohne endliche Teilüberdeckung. K beschränkt $\rightsquigarrow \exists R > 0\ \forall x \in K: \|x\|_\infty \leq R$
d.h. $K \subset W = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq R,\ i = 1, \dots, n\}$ (Würfel mit Seitenlänge 2R und Zentrum $0 \in \mathbb{R}^n$).

Wir zerlegen W in 2^n Würfeln durch Seitenhalbierung.
Dann gibt es wenigstens eines dieser Würfel, wir nennen es W_1, so dass $W_1 \cap K$ nicht durch endlich vielen V_i zu überdecken ist. Die Seitenlänge von W_1 ist R.

Wir zerlegen W_1 durch Seitenhalbierung und finden ein Würfel W_2 von Seitenlänge $R/2$, so dass $W_2 \cap K$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Durch Rekursion finden wir eine Folge $W \supset W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_k \ldots$ von Würfeln mit Seitenlänge von W_k gleich $R/2^{k-1}$ und $W_k \cap K$ hat keine endliche Teilüberdeckung.

Wähle nun $x_k \in W_k \cap K$. Für $l \geq k$ gilt $x_k, x_l \in W_k$ (da $W_l \subset W_k$) also $\|x_k - x_l\|_\infty \leq \frac{R}{2^k}$

$\rightsquigarrow (x_k)_k$ Cauchy-Folge $\rightsquigarrow (x_k)$ konvergent

Sei $x = \lim_{k \to \infty} x_k$. Da K abgeschlossen, gilt $x \in K$

$\rightsquigarrow \exists i \in I : x \in V_i \rightsquigarrow \exists \varepsilon > 0 \; B_\varepsilon^\infty(x) \subset V_i$

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{R}{2^{k-1}} < \varepsilon \rightsquigarrow W_k \subset B_\varepsilon^\infty(x) \subset V_i$

$\rightsquigarrow W_k \cap K$ von V_i überdeckt $\lightning$