06.06.2016

2.5.7 Satz Seien X, Y top. Räume, $f: X \to Y$ stetig. Ist X kompakt, so ist auch $f(X)$ kompakt.

Beweis Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$, d.h. $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} V_i$. Dann gilt

$$X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} V_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$$

f stetig, V_i offen $\rightsquigarrow$ $f^{-1}(V_i)$ sind offen. Somit ist $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es $i_1, \dots, i_k \in I$ mit $X = f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_k})$

$$\rightsquigarrow f(X) = f\big(f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_k})\big) = f(f^{-1}(V_{i_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(V_{i_k}))$$
$$\subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k} \quad . \quad \blacksquare$$

Beachte: Ist $f: X \to Y$ eine Abbildung so gilt:

$U_\alpha \subset X, \forall \alpha \in A \Rightarrow f\big(\bigcup_\alpha U_\alpha\big) = \bigcup_\alpha f(U_\alpha)$

$V_\alpha \subset Y, \forall \alpha \in A \Rightarrow f^{-1}\big(\bigcup_\alpha V_\alpha\big) = \bigcup_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$

$U \subset X \Rightarrow f^{-1}(f(U)) \supset U$ (Gleichheit falls f injektiv)

$V \subset Y \Rightarrow f(f^{-1}(V)) \subset V$ (Gleichheit falls $U \subset f(X)$)

2.5.8 Satz vom Minimum und Maximum

Sei X ein kompakter top. Raum und $f: X \to Y$ stetig. Dann ist f beschränkt und $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in X$ mit $f(\xi_1) \le f(x) \le f(\xi_2)$ für alle $x \in X$.

Beweis $f(X) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, also beschränkt und abgeschlossen. $f(X)$ beschränkt $\rightsquigarrow \inf f(X), \sup f(X) \in \mathbb{R}$
Dann sind $\inf f(X), \sup f(X)$ Berührpunkte von $f(X)$
(z.B. $s \in \mathbb{R}$, $s = \sup A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A: a \in (s-\varepsilon, s]$)
$f(X)$ abgeschlossen $\rightsquigarrow \inf f(X), \sup f(X) \in f(X)$ also $\exists \xi_1, \xi_2 \in X$ mit $f(\xi_1) = \inf f(X)$, $f(\xi_2) = \sup f(X)$. ▨

Wichtige Anwendung des Satzes 2.5.8: Fdtsatz der Algebra.

2.6 Zusammenhang

Die Rolle der Intervalle in $\mathbb{R}$ wird in topologischen Räume von zusammenhängenden Mengen übernommen.

2.6.1 Definition Sei X ein top. Raum. X heißt zusammenhängend (zsh) wenn es keine Zerlegung von X in zwei nicht-leere disjunkte offene Teilmenge gibt. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt zsh falls A mit der Teilraumtopologie ein zsh top. Raum ist.

$$X \text{ zsh} \Leftrightarrow \forall U, V \in \mathcal{O}: X = U \cup V, U \cap V = \emptyset : U = \emptyset \text{ oder } V = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow \forall U \subset X \text{ offen und abgeschlossen} \rightsquigarrow U = \emptyset \text{ oder } U = X$$

$$A \subset X \text{ zsh} \Leftrightarrow \forall U, V \in \mathcal{O}(X), A \subset U \cup V, A \cap U \cap V = \emptyset :$$
$$A \cap U = \emptyset \text{ oder } A \cap V = \emptyset$$

2.6.2 Satz $A \subset \mathbb{R}$ ist zsh $\Leftrightarrow$ A ist ein Intervall

Beweis „$\Rightarrow$" Sei $A \subset \mathbb{R}$ zsh. Setze $a = \inf A \in \overline{\mathbb{R}}$, $b = \sup A \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).
Dann ist $A \subset (a,b) \cup \{a,b\}$ (sind $a, b \in \mathbb{R}$ so ist natürlich $(a,b) \cup \{a,b\} = [a,b]$).

Wir zeigen, dass $A \supset (a,b)$. Daraus folgt, dass A ein Intervall mit Endpunkten a, b ist.
Ist (a,b) nicht in A enthalten, so gibt es $c \in (a,b), c \notin A$.
Sei $U = A \cap (-\infty, c)$, $V = A \cap (c, \infty)$. Dann sind U, V offen in A, $U \cap V = \emptyset$, $A = U \cup V$. Außerdem gibt es $a_1 \in (a,c) \cap A$, $a_2 \in (c,b) \cap A$ da $a = \inf A$, $b = \sup A$ also $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$. Dies ist ein Widerspruch, da A zsh.

„$\Leftarrow$" Seien U, V offen in A, $U \cap V = \emptyset$, $A = U \cup V$. Sei $x \in U$, $y \in V$ und o.E. $x < y$. Sei $z := \sup(U \cap [x,y])$.
Es gilt $z \notin U$. Sonst $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $[z, z+\varepsilon) \subset U \cap [x,y]$ (beachte $z < y$). Dies widerspricht die Supremumseig. von z.
Andererseits ist $V \cap [x,y]$ offen in $[x,y]$ also $U \cap [x,y] = [x,y] \setminus (V \cap [x,y])$ abgeschlossen in $[x,y]$. Es muss also $z \in \overline{U \cap [x,y]} \leadsto z \in U \cap \overline{U} = \emptyset$ ↯. $\square$

Beispiele von nicht zsh Mengen: $\mathbb{Q}$, Graph(f) wobei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

2.6.3 Verallgemeinerter Zwischenwertsatz

X, Y top Räume, $f: X \to Y$ stetig. X zsh $\leadsto f(X)$ zsh.

Beweis Seien U, V offen in Y, $f(X) \subset U \cup V$, $f(X) \cap U \cap V = \emptyset$. Dann sind $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ offen in X und $X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$,
$\emptyset = f^{-1}(\emptyset) = f^{-1}(f(X) \cap U \cap V) = \underbrace{f^{-1} f(X)}_{=X} \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$
$= f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

Es muss also $f^{-1}(U)=\emptyset$ oder $f^{-1}(V)=\emptyset$ und dann ist $f(X)\cap U=\emptyset$ oder $V\cap f(X)=\emptyset$. ▨

2.6.4 Folgerung $f: X\to\mathbb{R}$ stetig, X zsh. Dann für alle $x,y\in X$, c zwischen $f(x)$ und $f(y)$ gibt es $z\in X$ mit $f(z)=c$.

Beweis $f(X)$ ist zsh $\subset\mathbb{R}$ also ein Intervall $\rightsquigarrow$ $[f(x),f(y)]\subset f(X)$. ▨

$\boxed{9.06.2016}$

2.6.5 Definition X top. Raum. heißt wegzusammenhängend (wegzsh) $:\Leftrightarrow$ $\forall\, x,y\in X\ \exists\,\gamma:[a,b]\to X$ stetig, $\gamma(a)=x$, $\gamma(b)=c$ (γ heißt stetige Kurve).

$A\subset X$ heißt wegzsh falls A mit der Teilraumtopologie wegzsh. ist.

2.6.6 Beispiele (i) $(V,\|\cdot\|)$ NVR; $A\subset V$ heißt konvex $:\Leftrightarrow \forall x,y\in A\ \ [x,y]:=\{(1-t)x+ty : t\in[0,1]\}\subset A$

$[x,y]$ heißt Verbindungsstrecke von x nach y.

z.B. $B_r(x)$ ist konvex in $(V,\|\cdot\|)$.

Eine konvexe Menge ist wegzsh, da $t\mapsto\gamma(t)=(1-t)x+ty$ stetig ist.

(ii) Die Menge $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ist nicht konvex, aber zu $x,y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ gibt es $z\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ mit $[x,z]\cup[z,y]\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Wir sagen, wir können x und y mit einem Streckenzug verbinden. Ein Streckenzug ist eine stetige Abbildung $\gamma:[a,b]\to X$ so dass $c_0,c_1,\dots,c_m$ gibt mit $a=c_0<c_1<\dots<c_m=b$ so dass $\gamma|_{[c_{i-1},c_i]}$ linear ist für $i=1,2,\dots,m$.

Das Bild von γ ist $[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{m-1}, x_m]$ wobei $x_i = \gamma(e_i)$.

2.6.7 Satz X wegzsh $\Rightarrow$ X zsh

Beweis Seien U, V offen in X, $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$. Angenommen $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$. Seien $x \in U$, $y \in V$ und $\gamma : [a,b] \to X$ stetig, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Dann ist $\gamma([a,b])$ zsh und $\gamma([a,b]) \subset U \cup V$, $\gamma([a,b]) \cap U \cap V = \emptyset$
$U \cap \gamma([a,b]) \neq \emptyset$, $V \cap \gamma([a,b]) \neq \emptyset$ $\lightning$ $\boxtimes$

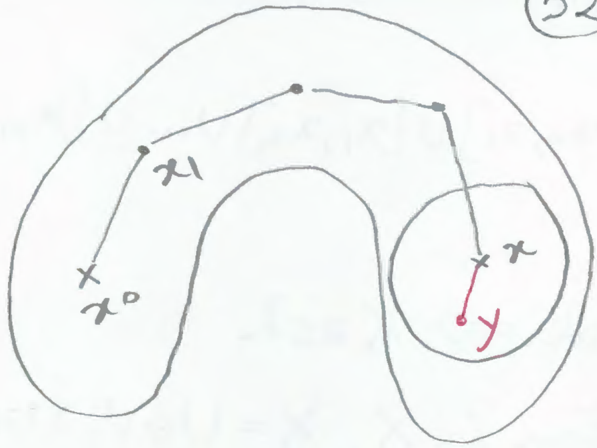
2.6.8 Beispiel Sei $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) ; x > 0\}$. Dann ist $\overline{A} = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$ zsh aber nicht wegzsh. Es gibt keine stetige Kurve von $(0,0)$ nach (x,y) mit $x > 0$ in A.

2.6.9 Satz Sei X eine nicht-leere, zsh, offene Menge in einem NVR. Dann ist X wegzsh. Genauer: für jede $x, y \in X$ gibt es ein Streckenzug der x und y verbindet.

Beweis Sei $x_0 \in \cancel{V}$ X fest. Definiere

$U = \{x \in X : \exists$ Streckenzug zwischen x_0 und x in $X\}$.

Offensichtlich $x_0 \in U$ also $U \neq \emptyset$. Wir zeigen dass U offen ist. Sei $x \in U$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subset X$ (X offen). Falls $[x_0, x_1] \cup \ldots \cup [x_{m-1}, x]$ ist ein Streckenzug zwischen x_0 und x, so ist $[x_0, x_1] \cup \ldots \cup [x_{m-1}, x] \cup [x, y]$ ein Streckenzug zwischen x_0 und y,



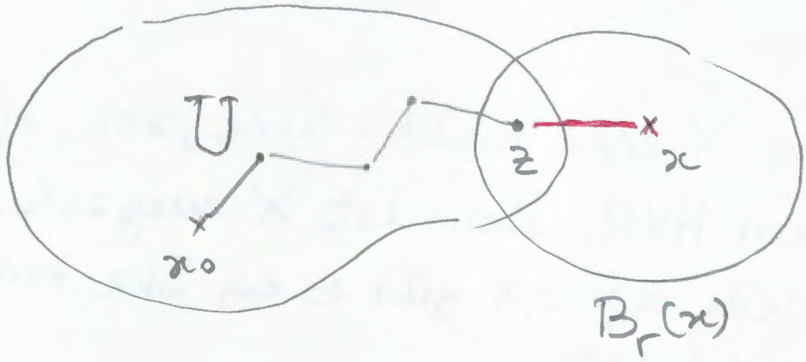
für alle $y \in B_r(x)$.

$\rightsquigarrow B_r(x) \subset U$

$\rightsquigarrow U$ offen.

Sei $V = X \setminus U$. V ist auch offen. Sei $x \in V$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subset X$. Dann gilt $B_r(x) \subset V$ d.h. $B_r(x) \cap U = \emptyset$ sonst $\exists\, z \in B_r(x) \cap U$ und einen Streckenzug $[x_0, x_1] \cup \dots [x_{m-1}, z]$ also $[x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{m-1}, z] \cup [z, x]$ ein Streckenzug zwischen x_0 und x also $x \in U$ ↯ da $x \in V = X \setminus U$.

Es gilt also $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$ und U, V sind offen. Da X zsh $\Rightarrow V = \emptyset \Rightarrow X = U$. ∎



§3 Differenzierbare Abbildungen

§3.1. Definition und Rechenregeln

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{C}$. Nach Analysis I heißt f differenzierbar (diffbar) in $a \in I$ falls

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda \in \mathbb{C}$$

Dann heißt $\lambda = f'(a)$ die Ableitung von f in a.

Ist nun f definiert in einem allgemeinen VR so hat der Differenzquotient $(f(x) - f(a))/(x-a)$ kein Sinn, da $x - a$ ein Vektor ist. Um eine sinnvolle Definition zu erhalten formen wir um:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \lambda(x-a)}{x - a} = 0$$

$$\iff \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \lambda(x-a)}{|x-a|} = 0$$

Dies zeigt, dass $x \longmapsto f(a) + \lambda(x-a)$ die beste lineare (affine eigentlich) Approximation von f in der Nähe von a ist. Wir haben deshalb:

f diffbar in $a \iff \exists T: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ linear:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{|x-a|} = 0$$

Dabei ist $T(t) = \lambda \cdot t = f'(a) \cdot \lambda$. Wenn wir $\rho_a(x) := f(x) - f(a) - T(x-a)$ notieren, so gilt:

f diffbar in $a \iff \exists T: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ linear, $\exists \rho_a: I \to \mathbb{C}: \rho_a(a) = 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{\rho_a(x)}{|x-a|} = 0 \text{ und}$$

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \rho_a(x), \quad x \in I$$

Setze $r: I \to \mathbb{C}$, $r_a(x) = \frac{\rho_a(x)}{|x-a|}$, $x \neq a$.

f diffbar in $a \iff \exists T: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ linear $\exists r_a: I \to \mathbb{C}$: $\lim_{x \to a} r_a(x) = 0$ und

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + |x-a| r_a(x), \; x \in I$$

13.06.2016

<u>3.1.1. Definition</u> Seien V, W endlich dimensionalen NVR, $D \subset V$ offen, $f: D \to W$, $a \in D$.

f <u>diffbar</u> in $a :\iff \exists T \in \mathcal{L}(V,W): \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$

$\iff \exists T \in \mathcal{L}(V,W) \; \exists \rho_a: D \to W: \; \rho_a(a) = 0, \; \lim_{x \to a} \frac{\rho(x)}{\|x-a\|} = 0$

und $f(x) = f(a) + T(x-a) + \rho_a(x)$, $x \in D$

$\iff \exists T \in \mathcal{L}(V,W) \; \exists r_a: D \to W$, $\lim_{x \to a} r_a(x) = 0$ und

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\| r_a(x), \; x \in D.$$

Die lin. Abbildung T heißt Differential von f in a, $T = df(a) = df_a$. Für $v \in V$ schreibe $T(v) = df(a) \cdot v = df(a)[v]$.

$f: D \to W$ heißt diffbar in $D \iff f$ diffbar in allen $x \in D$.

<u>3.1.2 Beispiele</u> (1) $f: D \to W$ konstant: $f(x) = w_0$ für alle $x \in D$. Dann ist f diffbar in D und $df(x) = 0 \in \mathcal{L}(V,W)$

(2) $f: V \to W$ ist linear $\leadsto f(x) = f(a) + f(x-a) + 0$

$\leadsto f$ diffbar und $df(a) = f$ für alle $a \in D$.

<u>3.1.3 Lemma</u> V, W endlich dim NVR. Dann ist jedes $T \in \mathcal{L}(V,W)$ Lipschitzstetig.

<u>Beweis</u> Sei $e_1, \dots, e_n$ Basis von V. Betrachte die Norm $\|v\|_\infty := \|\sum_1^n \lambda_i e_i\|_\infty := \sum_1^n |\lambda_i|$, $v \in V$.

Dann gilt $\|Tv\|_W = \|\sum_1^n \lambda_i Te_i\|_W \leq \sum_1^n |\lambda_i| \|Te_i\|_W$
$\leq C'\|v\|_\infty$ wobei $C' = \max_{1\leq i\leq n} \|Te_i\|_W$.

Alle Normen sind aber äquivalent auf V also
$\exists C''>0\ \forall v\in V\ \|v\|_\infty \leq C''\|v\|_V \rightsquigarrow$ mit $C = C'C''$ gilt
$$\forall v\in V: \quad \|Tv\|_W \leq C\|v\|_V$$
Für $v_1, v_2 \in V$ gilt $\|Tv_1 - Tv_2\|_W = \|T(v_1-v_2)\|_W \leq C\|v_1-v_2\|_V$.

Die Menge $S = \{v\in V : \|v\| = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt also kompakt. Die Funktion $S\to\mathbb{R}$, $v\mapsto\|Tv\|$ ist stetig, hat also ein Maximum:
$$\|T\| := \sup_{\|v\|=1} \|Tv\| = \sup_{v\in S}\|Tv\| \in [0,\infty)$$
heißt <u>Operatornorm</u> von T.

Für $v\in V\setminus\{0\}$ gilt $\frac{v}{\|v\|}\in S$ also $\left\|T\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\| \leq \|T\|$
$\rightsquigarrow \|Tv\| \leq \|T\|\cdot\|v\|$ und dies gilt auch für $v=0$.

<u>3.1.4 Lemma</u> Seien $V_1,\dots,V_k$, W endlich dim. NVR. Dann ist jede multilineare Abbildung $T: V_1\times\dots\times V_k\to W$ stetig und $\exists C\geq 0$ mit $\|T(v_1,\dots,v_k)\| \leq C\|v_1\|\cdots\|v_k\|$ für alle $(v_1,\dots,v_k)\in V_1\times\dots\times V_k$.

<u>Beispiel</u> Sei $T: V_1\times V_2\to W$ bilinear. Sei $a\in V_1\times V_2$ und für $x\in V_1\times V_2$ schreibe $x = a+h$, $h\in V_1\times V_2$. Dann gilt
$T(a+h) = T(a_1+h_1, a_2+h_2) = T(a_1,a_2) + T(a_1,h_2) + T(h_1,a_2)$
$+ T(h_1,h_2)$ und $\|T(h_1,h_2)\| \leq C\|h_1\|\cdot\|h_2\| \leq C(\|h_1\|+\|h_2\|)^2$

also $\frac{\|T(h_1,h_2)\|}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{\|T(h_1,h_2)\|}{\|h_1\|+\|h_2\|} \le C(\|h_1\|+\|h_2\|) \to 0$

für $\|(h_1,h_2)\| = \|h_1\|+\|h_2\| \to 0$.

Also ist T diffbar in a und $dT(a)\cdot h = T(a_1,h_2)+T(h_1,a_2)$.

Analog zeigt man: ist $T: V_1\times\ldots\times V_k \to W$ multilinear so ist T diffbar und

$$dT(a)\cdot h = T(h_1,a_2,\ldots,a_n) + T(a_1,h_2,a_3,\ldots,a_n) + \ldots + T(a_1,\ldots,a_{n-1},h_n).$$

<u>3.1.5 Satz</u> Sei f diffbar in $a\in D$. Dann gilt:

(i) $df(a)\cdot v = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$, $v\in V$.

Insbesondere ist $df(a)$ eindeutig bestimmt.

(ii) f stetig in a.

<u>Beweis</u> (i) $f(a+tv) = f(a) + tT(v) + \|tv\|\cdot r(a+tv)$

$\leadsto \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - T(v) = \frac{|t|\cdot\|v\|}{t} r(a+tv)$, $t\neq 0$

$\leadsto \left| \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - T(v)\right| = \|v\|\, r(a+tv) \to 0$, $t\to 0$

(ii) $\|f(x)-f(a)\| = \|T(x-a) + \|x-a\|\cdot r(x)\|$

$\le \|T(x-a)\| + \|x-a\|\cdot\|r(x)\| \le (C+\|r(x)\|)\,\|x-a\|$

Da $\|r(x)\|\to 0$, $x\to a$ gilt auch $f(x)\to f(a)$, $x\to a$. ▨

$df(a)\cdot v =: \partial_v f(a)$ heißt die Richtungsableitung von f in der Richtung v.

3.1.6 Satz Sei $D \subset V$ offen, $f : D \to W = W_1 \times W_2$, $f = (f_1, f_2)$. f diffbar in $a \in D \iff f_1, f_2$ diffbar in a. In diesem Fall $d(f_1,f_2)(a) = (df_1(a), df_2(a))$.

Beweis „$\Rightarrow$" Sei $f(a+h) = f(a) + T(h) + \rho(h)$, mit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{\|h\|} = 0$. Dabei ist $T : V \to W_1 \times W_2$ linear also $T = (T_1, T_2)$ mit $T_i : V \to W_i$ linear. Außerdem $\rho : D \to W_1 \times W_2$ hat die Form $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ und

$$\frac{\rho(h)}{\|h\|} = \left(\frac{\rho_1(h)}{\|h\|}, \frac{\rho_2(h)}{\|h\|}\right) \text{ also } \frac{\rho_1(h)}{\|h\|} \to 0, \ \frac{\rho_2(h)}{\|h\|} \to 0, \ h \to 0$$

$\rightsquigarrow$ $f_i(a+h) = f_i(a) + T_i(h) + \rho_i(h)$, $i = 1,2$

$\rightsquigarrow$ f_i diffbar in a und $df(a) = (df_1(a), df_2(a))$.

„$\Leftarrow$" analog. ▨

3.1.7 Satz $f, g : D \to W$ diffbar in a, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha f + \beta g$ diffbar in a und

$$d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha\, df(a) + \beta\, dg(a).$$

3.1.8 Satz (Kettenregel) V, W, Z endlich dim NVR, $D \subset V$, $G \subset W$ offen, $f : D \to W$, $g : G \to Z$ mit $f(D) \subset G$. Ist f diffbar in $a \in D$, g diffbar in $f(a)$, so ist $g \circ f$ diffbar in a und gilt $d(g\circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & G \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "df(a)"] \arrow[dr, "d(g\circ f)(a)"'] & W \arrow[d, "dg(f(a))"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> Setze $b = f(a)$. Wissen

$$f(a+h) = f(a) + df(a)\cdot h + \|h\| r_1(h),$$
$$g(b+k) = g(b) + dg(b)\cdot k + \|k\| r_2(k)$$

mit $\lim\limits_{h\to 0} r_1(h) = 0$, $\lim\limits_{k\to 0} r_2(k) = 0$.

Sei $b+k = f(a)+k = f(a+h) \rightsquigarrow k = f(a+h) - f(a)$
$= df(a)\cdot h + \|h\| r_1(h) \rightsquigarrow$

$$(g\circ f)(a+h) = g(b) + dg(b)\left[df(a)\cdot h + \|h\| r_1(h)\right]$$
$$+ \|df(a)\cdot h + \|h\| r_1(h)\| \, r_2(df(a)\cdot h + \|h\| r_1(h))$$
$$= (g\circ f)(a) + dg(b)\circ df(a)\cdot h + \rho(h)$$

mit $\rho(h) = \|h\| \, dg(b)\cdot r_1(h) + \|df(a)\cdot h + \|h\| r_1(h)\| \, r_2(\cdots)$

Es gilt

$$\|df(a)\cdot h + \|h\|\cdot r_1(h)\| \leq (C + \|r_1(h)\|)\|h\|$$

$$\rightsquigarrow \frac{\|\rho(h)\|}{\|h\|} \leq \|dg(b)\cdot r_1(h)\| + (C + \|r_1(h)\|) \, r_2(df(a)\cdot h + \|h\| r_1)$$

und $r_1(h) \to 0$, $dg_b(b)\cdot r_1(h) \to 0$,

$$r_2(\underbrace{df(a)\cdot h}_{\to 0} + \underbrace{\|h\|\cdot r_1(h)}_{\to 0}) \to 0 \quad \text{für } h \to 0.$$

$$\rightsquigarrow \lim_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{\|h\|} = 0 \rightsquigarrow g\circ f \text{ diffbar in } a \text{ und}$$

$$d(g\circ f)(a) = dg(b)\circ df(a) = dg(f(a))\circ df(a). \quad \square$$

<u>Beispiel</u> Sei V ein Skalarproduktraum, $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$.
Dann ist $V \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ diffbar auf $V \setminus \{0\}$ und

$$dF(x)\cdot h = \frac{\langle x,h \rangle}{\|x\|}.$$

<u>Beweis</u> Wir schreiben $F = h \circ g \circ f$ wobei $f: V \to V \times V$, $f(x) = (x,x)$, $g: V \times V \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \langle x,y \rangle$, $h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $h(t) = t^{1/2}$. Dann ist f linear und $df(x)\cdot h = (h,h)$.
g ist bilinear und $dg(x,y)\cdot(h,k) = \langle x,k \rangle + \langle h,y \rangle$
Schließlich $dh(t)\cdot s = h'(t)\cdot s = \frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot s$.
Kettenregel: $dF(x)\cdot h = dh(g \circ f(x)) \circ dg(\underbrace{f(x)}_{(x,x)}) \cdot \underbrace{df(x)\cdot h}_{(h,h)}$

$$= dh(\langle x,x \rangle)\, dg(x,x)\cdot(h,h)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\langle x,x \rangle}} \cdot \left(\langle x,h \rangle + \langle h,x \rangle\right) = \frac{\langle x,h \rangle}{\|x\|}. \quad ▨$$

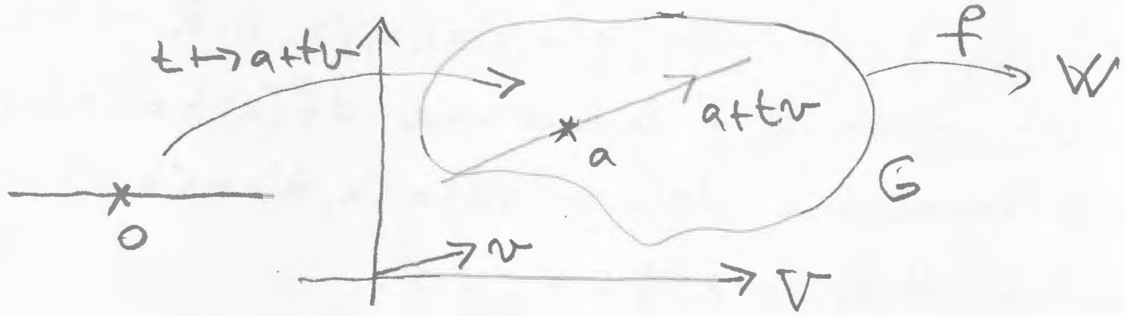
<u>16.06.2016</u>

Seien V, W NVR, $D \subset V$ offen, $a \in D$; $f: D \to W$, $v \in V$.
Existiert der GW

$$\partial_v f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

so heißt $\partial_v f(a)$ die Richtungsableitung von f in a in Richtung v.
Ist f diffbar in a, so existieren alle Richtungsableitungen, eigentlich $df(a)\cdot v = \partial_v f(a)$ (siehe 3.1.5(i)).
Das Differential $df(a) \in \mathcal{L}(V,W)$ fasst also alle Richtungsableitungen zusammen.
Vorsicht! Es kann sein, dass alle Richtungsableitungen existieren, aber f ist nicht diffbar!

Die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$ hat die folgende Interpretation: sie ist die Ableitung in 0 der Fkt von einer Variablen $t \mapsto f(a+tv)$, t in der Nähe von 0, und stellt die Variation der Fkt f entlang der Gerade $t \longmapsto a+tv$ in der Nähe von a.



Ist nun $V = \mathbb{R}^n$, wir definieren die i-te partielle Ableitung von f in a als

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \partial_i f(a) := \partial_{e_i} f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_i+t,\dots,a_n)-f(a)}{t}$$

Ist nun $V=\mathbb{R}^n$, $W=\mathbb{R}^m$ so schreibe

$$f = (f_1,\dots,f_m)^T = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\partial_i f(a) = \begin{pmatrix} \partial_i f_1(a) \\ \vdots \\ \partial_i f_m(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Die <u>Jacobi-Matrix von f in a</u> ist

$$J_f(a) = \Big(\underbrace{df(a)\cdot e_1}_{\text{Spalten in } \mathbb{R}^m}, \dots, df(a)\cdot e_n \Big) = \Big(\underbrace{\partial_1 f(a)}_{\text{Spalten in } \mathbb{R}^m}, \dots, \partial_n f(a) \Big)$$

$$\rightsquigarrow J_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

Ist f in a diffbar so existiert $J_a(f)$ und sie ist die assoziierte Matrix von $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ in der kanonischen Basen B in $\mathbb{R}^n$, C in $\mathbb{R}^m$:

$$J_f(a) = M_C^B(df(a)).$$

Spezialfälle:

$n = m = 1 \rightsquigarrow J_f(a) = f'(a) \in M_{1\times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

$n = 1$: $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \rightsquigarrow J_f(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$

$m = 1$: $J_f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)) \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$

ist ein Zeilenvektor in $\mathbb{R}^n$

<u>3.1.9 Definition</u> Sei $f : D \to \mathbb{R}$ diffbar in $a \in D$

Dann heißt

$$\operatorname{grad} f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} = J_f(a)^T \in \mathbb{R}^n$$

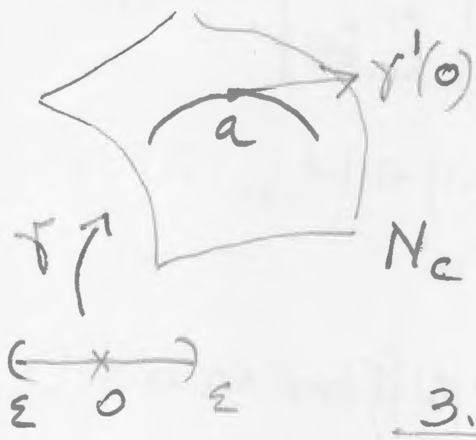
der <u>Gradient</u> von f in a. Es gilt

$$df(a).v = J_f(a).v = (\partial_1 f(a) \cdots \partial_n f(a)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \langle \operatorname{grad} f(a), v \rangle.$$

Der Gradient enthält viele Informationen über die Funktion. Sei $f: D \to \mathbb{R}$. Die Menge $N_c = f^{-1}(c) = \{x \in D : f(x) = c\}$ heißt Niveaumenge von f. Z.B. $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$. Dann ist $f^{-1}(r)$, $r > 0$, die Sphäre von Radius r in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Wir zeigen, dass der Gradient steht senkrecht zur Niveaumengen und zeigt in Richtung des stärken Anstiegs der Funktion f.

Dazu definieren wir Tangentialvektoren in $a \in N_c$ zu N_c. Betrachte eine diffbare Abbildung $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Im} \gamma \subset N_c$, $\gamma(0) = a$.



Der Vektor $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^m$ heißt Tangentialvektor zu N_c.

$T_a(N_c) = \{\gamma'(0) : \gamma \text{ diffbare Kurve wie oben}\}$ ist ein Vektorunterraum von $\mathbb{R}^n$.

<u>3.1.10 Satz</u> $\operatorname{grad} f(a) \perp T_a(N_c)$

d.h. $\langle \operatorname{grad} f(a), v \rangle = 0$ für alle $v \in T_a(N_c)$.

<u>Beweis</u> Sei $v = \gamma'(0)$. Es gilt $(f \circ \gamma)(t) = c$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Daher mit Kettenregel

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(0)) \cdot \frac{d\gamma_k}{dt}(0)$$

$$= \langle \operatorname{grad} f(a), v \rangle. \qquad ▨$$

3.1.11. Satz (Kettenregel für Jacobi-Matrizen)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f: D \to G$, $g: G \to \mathbb{R}^\ell$

Ist f in a diffbar, g in $f(a)$ diffbar so ist $g \circ f$ diffbar in a und gilt

$$\underbrace{J_{g \circ f}(a)}_{\in M_{\ell \times n}(\mathbb{R})} = \underbrace{J_g(f(a))}_{\in M_{\ell \times m}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{J_f(a)}_{\in M_{m \times n}(\mathbb{R})}$$

Ausführlich gilt für $k \in \{1, \dots, \ell\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Beweis Seien B, C, D kanonische Basen in $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell$

Aus LA wissen wir:

$$M_D^B\big(d(g \circ f)(a)\big) = M_D^B\big(dg(f(a)) \circ df(a)\big)$$

$$= M_D^C\big(dg(f(a))\big) \cdot M_C^B\big(df(a)\big)$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "df(a)"] \arrow[d, "d(g\circ f)(a)"'] & \mathbb{R}^m \arrow[dl, "dg(f(a))"] & C \arrow[l, hook'] \\
& \mathbb{R}^\ell & & \\
& D \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

3.1.12 Satz (Hauptkriterium für Differenzierbarkeit)

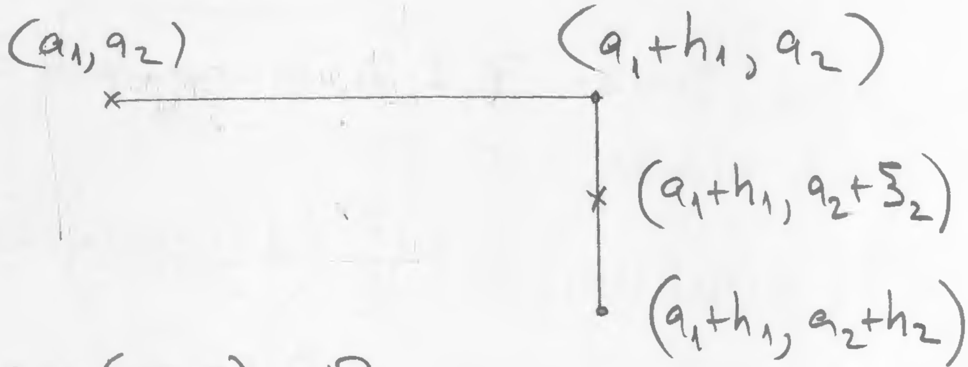
$D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in D$, $f: D \to \mathbb{R}^m$. Falls in einer Umgebung U von a existieren alle partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$, und sind stetig in a, so ist f differenzierbar in a. Dann gilt

$$df(a) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) \cdot v_i \,, \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

<u>Beweis</u> $(n=2, m=1)$ Sei $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^\infty(a) \subset U$, $h \in \mathbb{R}^2$ $\|h\|_\infty < \varepsilon$ d.h. $a+h \in B_\varepsilon^\infty(a)$. Sei

$$\rho(h) = f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{2} \partial_j f(a) \cdot h_j \,.$$

Schreibe $f(a+h) - f(a) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2)$ $+ f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2)$



Betrachte $g_1: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$

$g_1(t) = f(a_1+h_1, a_2+t)$; g_1 ist diffbar da $\partial_2 f$ existiert

MWS aus Ana 1 $\rightsquigarrow$ $\exists\, \xi_2$ zwischen 0 und h_2 mit

$g_1(h_2) - g_1(0) = g'(\xi_2) \cdot h_2$ d.h.

$f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f_1(a_1+h_1, a_2) = \partial_2 f(a_1+h_1, a_2+\xi_2) \cdot h_2$

Analog $\exists\, \xi_1$ zwischen 0 und h_1 mit

$f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2) = \partial_1 f(a_1+\xi_1, a_2) \cdot h_1$