3.2.2 Satz $D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet ($:\Leftrightarrow$ offen & zsh.)
$f: D \to \mathbb{R}^m$ diffbar mit $df(x) = 0$ für alle $x \in D$.
Dann ist f konstant

Beweis OBdA $m = 1$. Sei $x_0 \in D$ fest. Sei $x \in D$ beliebig. Da D wegzsh ist (Satz 2.6.9) so gibt es einen Streckenzug $[x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{m-1}, x] \subset D$
Satz 3.2.1 $f(x_i) - f(x_{i-1}) = df(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$
$\rightsquigarrow f(x) = f(x_{m-1}) = \dots = f(x_1) = f(x_0)$. $\blacksquare$

Bemerkung (1) 3.2.2 gilt nicht wenn D nicht zsh
z.B. $f: (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, $x \in (0,1)$ und $f(x) = 2$, $x \in (2,3)$

(2) Satz 3.2.1 gilt nicht für $f: D \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$.

Bsp. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$
$f(2\pi) = f(0) = (1,0)$, $f(2\pi) - f(0) = (0,0)$.
$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\langle \operatorname{grad} f(\xi), 2\pi - 0 \rangle = 2\pi \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
für alle $t \in \mathbb{R}$.

Auch wenn $f(y) - f(x) \neq df(\xi)(y - x)$ i.A. wir können den Zuwachs der Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, kontrollieren.

Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}$ stetig

Setze $\displaystyle\int_a^b \gamma(t)\,dt := \begin{pmatrix} \int_a^b \gamma_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_a^b \gamma_m(t)\,dt \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

$$\rho(h) = [\partial_1 f(a_1+\xi_1, a_2) - \partial_1 f(a_1,a_2)]h_1 + [\partial_2 f(a_1+h_1, a_2+\xi_2) - \partial_2 f(a_1,a_2)]h_2$$

$$|\rho(h)| \le |\partial_1 f(\dots) - \partial_1 f(a)||h_1| + |\partial_2 f(\dots) - \partial_2 f(a)||h_2|$$

$$\le \Big(|\underbrace{\partial_1 f(\dots) - \partial_1 f(a)}_{\substack{\to 0 \\ h\to 0}}| + |\underbrace{\partial_2 f(\dots) - \partial_2 f(a)}_{\substack{\to 0 \\ h\to 0}}|\Big)\|h\|_\infty$$

$\blacksquare$

20.06.2016

§3.2. Mittelwertsatz und Schrankensatz

3.2.1 Satz $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar, $x, y \in D$ mit $[x,y] \subset D$. Dann $\exists\, \xi \in [x,y]$ mit

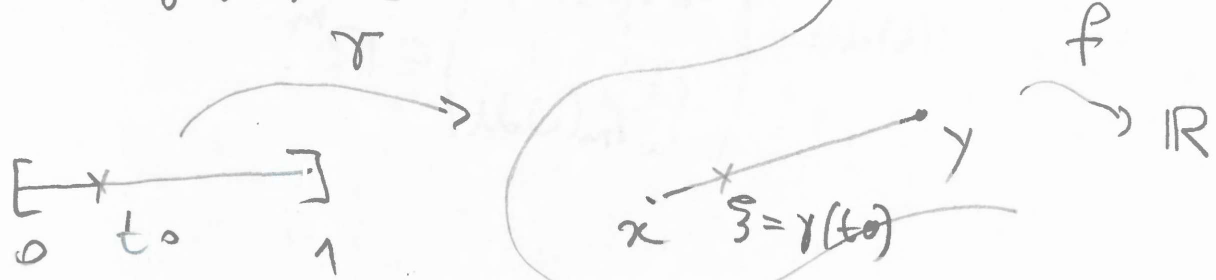
$$f(y) - f(x) = df(\xi)\cdot(y-x) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), y-x\rangle$$

Bemerkung Wenn $n=1$ erhalten wir der MWS aus Analysis I: $f(y)-f(x) = f'(\xi)(y-x)$, ξ zwischen x,y.

Beweis $\gamma: [0,1] \to D$, $\gamma(t) = (1-t)x + ty \leadsto$ $J_\gamma(t) = y-x$. Die Fkt $f\circ\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}$ ist diffbar und $J_{f\circ\gamma}(t) = J_f(\gamma(t))\cdot J_\gamma(t) = J_f(\gamma(t))\cdot(y-x)$ $= df(\gamma(t))\cdot(y-x)$.

MWS für $f\circ\gamma \leadsto \exists\, t_0 \in (0,1)$ mit $(f\circ\gamma)(1) - (f\circ\gamma)(0)$ $= (f\circ\gamma)'(t_0) = J_{f\circ\gamma}(t_0) = df(\gamma(t_0))\cdot(y-x)$

Setze $\gamma(t_0) = \xi$. $\blacksquare$



Frage: Gilt $\partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f)$? I. A. nicht, z.B.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

Dann existieren $\partial_1(\partial_2 f)(0,0)$, $\partial_2(\partial_1 f)(0,0)$ aber sind nicht gleich.

<u>3.3.2 Satz von Schwarz</u> $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in D$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Die Abbildung $f: D \to \mathbb{R}^m$ besitze $\partial_i f$, $\partial_j f$ und $\partial_{ij} f$ und $\partial_{ij} f$ sei in a stetig. Dann existiert auch $\partial_{ji} f(a)$ und $\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a)$.

<u>Beweis</u> OBdA $n=2$, $m=1$, $i=1$, $j=2$, $a=(0,0)$. Dann gilt

$$\partial_2(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\partial_1 f(0,h) - \partial_1 f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\lim_{k\to 0}\frac{f(k,h)-f(0,h)}{k} - \lim_{k\to 0}\frac{f(k,0)-f(0,0)}{k}\right]$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{1}{hk}\Big[\underbrace{f(k,h) - f(0,h)}_{g_k(h)} - \underbrace{f(k,0) + f(0,0)}_{g_k(0)}\Big]$$

Sei $g_k(y) = f(k,y) - f(0,y)$. MWS $\rightsquigarrow$ $\exists\, \eta$ zwischen 0 und h mit $g_k(h) - g_k(0) = h\, g_k'(\eta) =$

$$= h\left[\partial_2 f(k,\eta) - \partial_2 f(0,\eta)\right] \underset{\text{MWS}}{=} hk\, \partial_1(\partial_2 f)(\xi,\eta)$$

mit ξ zwischen 0 und k.

$$\rightsquigarrow \partial_2(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{h,k\to 0} \partial_1(\partial_2 f)(\xi,\eta) = \partial_1(\partial_2 f)(0,0)$$

da $\partial_1(\partial_2 f)$ stetig in $(0,0)$. $\blacksquare$

3.3.3 Definition $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$.
$i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ nicht unbedingt verschieden.
Partielle Ableitung k-ter Ordnung in Richtungen $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$:

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f := \partial_{i_1}\left(\cdots \left(\partial_{i_{k-1}}\left(\partial_{i_k} f\right)\right) \cdots \right)$$

falls $\partial_{i_k} f$ existiert, $\partial_{i_{k-1}}(\partial_{i_k} f)$ existiert usw.

Schreibweise

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} = \partial_{i_1 \ldots i_k} f := \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f$$

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_i^l} = \partial_i^l f = \underbrace{\partial_i \partial_i \cdots \partial_i f}_{l\text{-mal}} \quad l \in \mathbb{N}_0 \quad (\partial_i^0 f = f)$$

Wir können auch alle Variablen einbeziehen

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f \quad , \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

3.3.4 Definition $f : D \to \mathbb{R}^m$ **k-mal stetig diffbar**
$:\Leftrightarrow$ alle partielle Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und sind stetig. Notation: $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$
f unendlich oft diffbar $:\Leftrightarrow$ Ableitungen aller Ordnung existieren

Notation $\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R}^m)$.

$$\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}^m) \supset \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^m) \supset \ldots \supset \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m) \supset \mathcal{C}^{k+1}(D, \mathbb{R}^m)$$

$$\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0^n} \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m).$$

3.2.3 Satz $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar $[x,y] \subset D$. Dann gilt:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df\big((1-t)x + ty\big) \cdot (y-x)\, dt$$

Bemerkung: der Punkt $\xi_t = (1-t)x + ty$ läuft in $[x,y]$ wenn t in $[0,1]$ läuft. $[0,1] \ni t \mapsto df(\xi_t)\cdot(y-x) \in \mathbb{R}^m$ ist dann eine stetige Kurve.

Beweis Betrachte $\gamma: [0,1] \to D$, $\gamma(t) = (1-t)x + ty$.
γ parametrisiert $[x,y]$, $g = f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ ist stetig diffbar. Hauptsatz der Diff- und Integralrechnung komponentenweise:

$$g(1) - g(0) = \begin{pmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ \vdots \\ g_m(0) - g_m(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 g_1'(t)\, dt \\ \vdots \\ \int_0^1 g_m'(t)\, dt \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Kettenregel}}{=} \begin{pmatrix} \int_0^1 df_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ \vdots \\ \int_0^1 df_m(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 df_1(\gamma(t))(y-x)\, dt \\ \vdots \\ \int_0^1 df_m(\gamma(t))(y-x)\, dt \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

3.2.4 Lemma Mit $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ gilt

$$\left\| \int_a^b \gamma(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\|\, dt$$

Beweis Sei $u := \int_a^b \gamma(t)\, dt \in \mathbb{R}^m$.
Ist $u = 0$ so ist die Behauptung klar.
Sei $u \neq 0$. Dann gilt

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \left\langle \int_a^b \gamma(t)\, dt, \int_a^b \gamma(t)\, dt \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \int_a^b \gamma_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_a^b \gamma_m(t)\,dt \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^m \int_a^b \gamma_i(t) x_i \,dt = \int_a^b \langle \gamma(t), u \rangle \,dt$$

Cauchy-Schwarz: $\langle \gamma(t), u \rangle \leq \|\gamma(t)\| \cdot \|u\|$. Somit

$$\|u\|^2 \leq \int_a^b \langle \gamma(t), u \rangle \,dt \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| \cdot \|u\| \,dt = \|u\| \int_a^b \|\gamma(t)\| \,dt$$

$$\rightsquigarrow \|u\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt \rightsquigarrow \left\| \int_a^b \gamma(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\|\,dt. \quad \blacksquare$$

3.2.5 Schrankensatz $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset D$ kompakt und konvex. Sei $f: D \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar. Dann ist $f: K \to \mathbb{R}^m$ Lipschitzstetig mit Lipschitz-Konstante $L = \sup_{x \in K} \|df(x)\|_{op}$, wobei $\|\cdot\|_{op}$ die Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist.

Beweis Seien $x, y \in K$. Dann gilt $[x,y] \subset K$ und

$$\|f(y) - f(x)\| = \left\| \int_0^1 df((1-t)x + ty) \cdot (y-x)\,dt \right\|$$

$$\leq \int_0^1 \|df((1-t)x+ty)(y-x)\|\,dt \leq \int_0^1 \underbrace{\|df((1-t)x+ty)\|_{op}}_{\leq L} \|y-x\|\,dt$$

$$\leq L\|y-x\|. \quad \blacksquare$$

$\boxed{23.06.2016}$

§3.3. Höhere Ableitungen

3.3.1 Definition $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^m$, $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$
Die partielle Ableitung $\partial_j f$ existiere auf D und sei $\partial_j f: D \to \mathbb{R}^m$ die resultierende Funktion. Existiert die i-te Ableitung $\partial_i(\partial_j f)$ in einem Punkt $a \in D$, so heißt $\partial_i(\partial_j f)$ eine partielle Ableitung 2. Ordnung in a.

Notation $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) := \partial_{ij} f(a) := \partial_i(\partial_j f)(a)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \partial_i^2 f(a) = \partial_i(\partial_i f)(a).$$

3.3.5 Bemerkung Ist $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$ so gilt:
für jede Permutation $\sigma \in S_k$, $\partial_{i_1 \dots i_k} f = \partial_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)} f$
Die Reihenfolge der Ableitungen kann vertauscht werden.
Beweis: Induktion nach k unter Verwendung des Satzes von Schwarz und der Tatsache, dass jeder Permutation eine Verkettung von Transpositionen ist.

Dies erlaubt, für jeden k-tupel $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ ein Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ zu assoziieren mit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$

$$\partial_{i_1 \dots i_k} f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f = \partial^\alpha f$$

Dabei ist α_1 die Anzahl von Einsen in $(i_1, \dots, i_k)$, α_2 Anzahl von Zweier in $(i_1, \dots, i_k)$, usw.
z.B.

$$\partial_{12132} f = \partial_{11223} f = \partial_1^2 \partial_2^2 \partial_3^1 f = \partial^{(2,2,1,0,\dots,0)} f$$

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (1,2,1,3,2) \longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (2,2,1,0,\dots,0)$$

3.3.6 Definition Sei $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}^m)$, $a \in D$.
Die Bilinearform $d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $d^2 f(a)(u, v) = \partial_u (\partial_v f)(a)$ heißt <u>Differential 2. Ordnung von f in a</u>.
Wenn $m = 1$, heißt $d^2 f(a)$ auch <u>Hesse-Form von f in a</u>.
Auch im Falle $m = 1$ definieren wir die <u>Hesse-Matrix</u>

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) & \dots & \partial_{1n} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) & \dots & \partial_{2n} f(a) \\ \vdots & & & \\ \partial_{n1} f(a) & \partial_{n2} f(a) & \dots & \partial_{nn} f(a) \end{pmatrix}$$

Die Def. von $d^2f(a)$ ist sinnvoll: $f \in \mathcal{C}^2 \rightsquigarrow \partial_1 f, \dots, \partial_n f \in \mathcal{C}^1$ also auch $\partial_v f = v_1\partial_1 f + \dots + v_n \partial_n f \in \mathcal{C}^1$. Es existiert also $\partial_u(\partial_v f)$. Für eine diffbare Fkt g ist $w \mapsto \partial_w f(x) = df(x)\cdot w$ linear, also ist $(u,v) \longmapsto \partial_u(\partial_v f)(a)$ bilinear.

Formel: $\partial_u(\partial_v f)(a) = \partial_u\big(df(\cdot)\cdot v\big)(a) = d\big(df(\cdot)v\big)(a)\cdot u$
$=: d^2f(a)(u,v)$.

Sei $e_1,\dots,e_n$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$. Wir rechnen

$$d^2f(a)(u,v) = d^2f(a)\Big(\sum_{i=1}^n u_ie_i, \sum_{j=1}^n v_je_j\Big) = \sum_{i,j=1}^n u_iv_j \underbrace{d^2f(a)(e_i,e_j)}_{\substack{\parallel \\ \partial_{e_i}\partial_{e_j} f(a) \\ \parallel \\ \partial_{ij} f(a)}}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n u_iv_j\,\partial_{ij}f(a)$$

Daher ist $H_f(a)$ die darstellende Matrix von $d^2f(a)$ falls $m=1$:

$$d^2f(a)(u,v) = u^T\cdot d^2f(a)\cdot v = (u_1,\dots,u_n)\cdot H_f(a)\cdot \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}.$$

Wegen des Satzes 3.3.2 von Schwarz gilt $\partial_{ij}f(a) = \partial_{ji}f(a)$

$\rightsquigarrow d^2f(a)(u,v) = \sum u_iv_j\,\partial_{ij}f(a) = \sum u_iv_j\,\partial_{ji}f(a) = d^2f(a)(v,u)$

d.h. $d^2f(a): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eine <u>symmetrische</u> bilineare Abbildung.

<u>3.5.7 Definition</u> Sei $f \in \mathcal{C}^k(D,\mathbb{R}^m)$, $a\in D$. Das Differential k-ter Ordnung von f in a ist die Abbildung

$$d^kf(a): \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ mal}} \to \mathbb{R}^m, \quad d^kf(a)(v_1,\dots,v_k) = \partial_{v_1}\cdots\partial_{v_k} f(a)$$

$d^kf(a)$ ist eine symmetrische multilineare Abbildung und

$$d^kf(a)(v_1,\dots,v_k) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^n v_{1i_1}v_{2i_2}\cdots v_{ki_k}\,\partial_{i_1\dots i_k}f(a).$$

Beispiel $n=2, k=2;\ v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$

$$d^2f(a)(v,v) = \partial_{11}f(a)v_1v_1 + \partial_{12}f(a)v_1v_2 + \partial_{21}f(a)v_2v_1 + \partial_{22}f(a)v_2v_2$$

$$= \partial_1^2 f(a)v_1^2 + 2\partial_{12}f(a)v_1v_2 + \partial_2^2 f(a)v_2^2$$

Wir können die letzte Formel als ein formales Quadrat interpretieren:

$$(v_1\partial_1 + v_2\partial_2)^2 = v_1^2\partial_1^2 + 2v_1v_2\partial_1\partial_2 + v_2^2\partial_2^2$$

$n=2,\ k=3,\ v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^3$

$$d^3f(a)(v,v) = \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{2} v_{i_1}v_{i_2}v_{i_3}\,\partial_{i_1i_2i_3}f(a)$$

$$= v_1^3\partial_1^3 f(a) + 3v_1^2v_2\,\partial_1^2\partial_2 f(a) + 3v_1v_2^2\partial_1\partial_2^2 f(a) + v_2^3\partial_2^3 f(a)$$

$$\text{"} = (v_1\partial_1 f(a) + v_2\partial_2 f(a))^3 \text{"}$$

wobei formel $(v_1\partial_1 + v_2\partial_2)^3 = v_1^3\partial_1^3 + 3v_1^2v_2\partial_1^2\partial_2 + 3v_1v_2^2\partial_1\partial_2^2 + v_2^3\partial_2^3$

Es gibt eine Verbindung zwischen die Formel für $d^kf(a)(\underbrace{v,\dots,v}_{k\text{-mal}})$ und die Multinomialformel:

$$(x_1+\dots+x_n)^k = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha_1!\dots\alpha_n!}\, x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$$

Notationen: Für $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,\dots,x_n)$ setze $|\alpha| := \alpha_1+\dots+\alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1!\dots\alpha_n!$; $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_n^{\alpha_n}$.

3.3.8. Lemma Sei $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^k(D)$.

Dann gilt $$d^k f(a) \cdot v^{(k)} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) \cdot v^\alpha$$

Beweis Wissen $$d^k f(a) \cdot v^{(k)} = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \partial_{i_1 \dots i_k} f(a) v_{i_1} \dots v_{i_k}$$

In diese Summe tauchen viele Gleiche Terme auf, z.B. $\partial_{121\dots} = \partial_{112\dots}$. Wir sortieren daher alle Gleiche Terme d.h. zu $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = k$, suchen wir alle $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ mit $\partial_{i_1 \dots i_k} f = \partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$ und $v_{i_1} \dots v_{i_k} = v^\alpha = v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n}$ d.h. wir suchen alle $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ wobei es α_1 Einsen, α_2 Zweier, ..., α_n n-er gibt.

Wir können die Einsen auf $\binom{k}{\alpha_1}$ Arten wählen, die Zweier unabhängig auf $\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}$ Arten wählen, ..., die n-er auf $\binom{k-\alpha_1-\dots-\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ Arten wählen. Insgesamt

$$\binom{k}{\alpha_1}\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\dots\binom{k-\alpha_1-\dots-\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \frac{k!}{\alpha_1 \cancel{(k-\alpha_1)!}} \frac{\cancel{(k-\alpha_1)!}}{\alpha_2! \cancel{(k-\alpha_1-\alpha_2)!}} \cdot \dots$$

$$= \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!}. \text{ Also}$$

$$\sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \partial_{i_1 \dots i_k} f(a) v_{i_1} \dots v_{i_k} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = k}} \sum_{\substack{(i_1 \dots i_k) \\ \text{enthält } \alpha_1 \text{ Einsen,} \\ \alpha_2 \text{ Zweier}, \dots, \alpha_n \text{ n-er}}} \partial_{i_1 \dots i_k} f(a) v_{i_1} \dots v_{i_k}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) \cdot v^\alpha. \qquad \blacksquare$$

§ 3.4 Die Taylorformel

3.4.1 Definition Sei $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D,\mathbb{R})$, $a \in D$. Das Polynom

$$T_{k,a} f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2} d^2 f(a)\cdot(x-a)^{(2)} + \dots + \frac{1}{k!} d^k f(a)(x-a)^{(k)}$$

heißt <u>k-tes Taylorpolynom</u> zu f in Etwicklungspunkt $a \in D$

Beispiel $n=2$, $k=2$.

$$T_{2,a} f(x) = f(a) + \partial_1 f(a)(x_1-a_1) + \partial_2 f(a)\cdot(x_2-a_2) + \frac{1}{2!}\left[\partial_{11} f(a)(x_1-a_1)^2 + 2\partial_{12} f(a)(x_1-a_1)(x_2-a_2) + \partial_{22} f(a)(x_2-a_2)^2\right]$$

ist ein Polynom 2. Ordnung in x_1-a_1 und x_2-a_2.

3.4.2 Satz Sei $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D,\mathbb{R})$, $a, x \in D$ mit $[a,x] \subset D$. Dann gibt es $\xi \in [a,x]$ mit

$$f(x) = T_{k,a} f(x) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(\xi)\cdot(x-a)^{(k+1)}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le k}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = k+1}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi)(x-a)^\alpha$$

(Taylorformel mit Lagrange-Restglied).

Beweis Sei $\gamma: [0,1] \to D$, $\gamma(t) = (1-t)a + tx$ und $g = f\circ\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}$. Dann ist $g'(t) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\gamma(t))\cdot(x_j-a_j)$,

$$g''(t) = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \partial_j f(\gamma(t))(x_j-a_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \partial_k \partial_j f(\gamma(t))(x_k-a_k)(x_j-a_j)$$

$$= d^2 f(\gamma(t))\cdot(x-a)^{(2)}$$

und durch Rekursion $g^{(k)}(t) = d^k f(\gamma(t))\cdot(x-a)^{(k)}$.

Taylorformel für $g: [0,1] \to \mathbb{R}$, g $(k+1)$-diffbar

$\leadsto$ $g(1) = g(0) + \frac{1}{1!} g(0) + \frac{1}{2!} g'(0) + \ldots + \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(t_0)$

mit $t_0 \in (0,1)$. Daraus folgt die Behauptung (mit $\xi = \gamma(t_0)$). ▨

<u>3.4.3 Satz</u> Sei $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$, $a \in D$. Dann gilt

$$f(x) = T_{k,a} f(x) + R(x), \quad \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{\|x-a\|^k} = 0.$$

<u>Beweis</u> $f(x) = T_{k-1,a} f(x) + \frac{1}{k!} d^k f(\xi)(x-a)^{(k)}$ (aus 3.4.2)

$$= T_{k,a} f(x) + \underbrace{\frac{1}{k!}\left[d^k f(\xi)(x-a)^{(k)} - d^k f(a)(x-a)^{(k)}\right]}_{R(x)}$$

$$|R(x)| = \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \left(\partial^\alpha f(\xi) - \partial^\alpha f(a)\right)(x-a)^\alpha \right|$$

$$\leq \sum_{|\alpha|=k} \underbrace{\frac{1}{\alpha!} \left|\partial^\alpha f(\xi) - \partial^\alpha f(a)\right|}_{\to 0,\ x \to a} \cdot \underbrace{|x_1-a_1|^{\alpha_1} \cdots |x_n-a_n|^{\alpha_n}}_{\leq \|x-a\|_\infty^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} = \|x-a\|_\infty^k}$$

▨

§3.5. Lokale Extrema

3.5.1 Definition X topologischer Raum, $f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X$

(i) f hat ein Maximum (bzw. Minimum) in a $:\Leftrightarrow$
$\forall x \in X: f(x) \leq f(a)$ (bzw. $f(x) \geq f(a)$)
Wir sagen auch, dass f ein globales Maximum (bzw. Minimum) in a hat.

(ii) f hat ein lokales Maximum (bzw. lokales Min.) in a $:\Leftrightarrow$ $\exists U$ Umgebung von a $\forall x \in U: f(x) \leq f(a)$ (bzw. $f(x) \geq f(a)$).

(iii) f hat ein strenges Maximum (bzw. strenges Minimum) in a $:\Leftrightarrow$ $\forall x \in X \setminus \{a\}: f(x) < f(a)$ (bzw. $f(x) > f(a)$)

(iv) f hat ein strenges lokales Maximum (bzw. strenges lokales Minimum) in a $\Leftrightarrow$ $\exists U$ Umgebung von a $\forall x \in U \setminus \{a\}: f(x) < f(a)$ (bzw. $f(x) > f(a)$)

(v) f hat ein lokales Extremum in a $:\Leftrightarrow$ f hat ein lokales Maximum oder Minimum in a.

3.5.2 Definition $D \subset (V, \|\cdot\|)$, $f: V \to \mathbb{R}$ diffbar.
Ein Punkt $a \in D$ heißt kritisch für f $:\Leftrightarrow$
$df(a) = 0 \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$.

3.5.3 Satz (Fermatsches Kriterium für lokale Extrema)
$D \subset (V, \|\cdot\|)$, $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar, a lokales Extremum in D. Dann gilt $df(a) = 0$ d.h. a ist kritischer Punkt.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subset D$. Sei $v \in V$, $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to B_\varepsilon(a)$
$\gamma(t) = a + tv$. Dann hat $f \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ein lokales Extremum in 0. Analysis I $\leadsto$ $0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = df(a) \cdot \gamma'(0) = df(a) \cdot v$. ▨