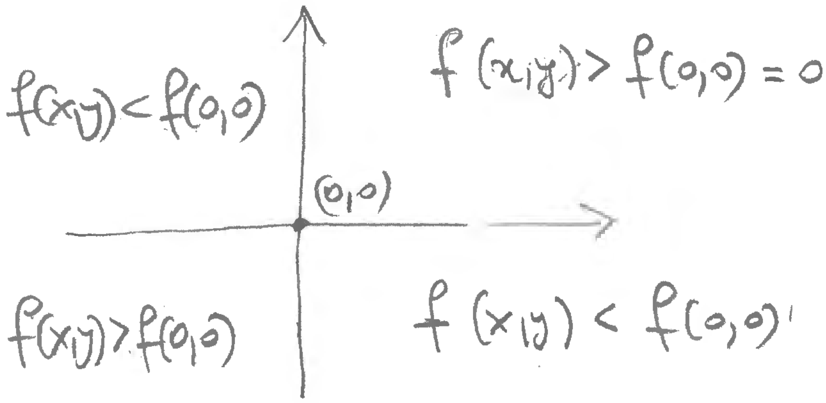
Das Fermat-Kriterium ist notwendig, jedoch nich hinreichend für das Vorhandensein eines Extremums. Dies ist schon in eindimensionalen Fall bekannt, z.B. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ mit kritischer Punkt $x_0 = 0$, der aber kein Extremum ist. Ein 2-dimensionales Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$. Dann ist $(0,0)$ ein kritischer Punkt, aber in jeder Umgebung von $(0,0)$ gibt es Punkte $u, v$ mit $f(u) < \underbrace{f(0,0)}_{=0} < f(v)$



**3.5.4 Satz** (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D,\mathbb{R})$ und $a \in D$ ein krit. Pkt.
Dann gilt:

(i) Die Hesse-Form $d^2f(a)$ positiv definit $\Rightarrow$ f hat in a ein strenges lok. Min.

(ii) —"— negativ $\Rightarrow$ ... Max.

(iii) —"— indefinit $\Rightarrow$ kein Extremum.

**Beweis** (i) Qualitativer Taylorformel und $df(a)=0 \Rightarrow$

$$f(a+h) - f(a) = d^2f(a)(h,h) + \alpha(h)\|h\|^2$$ wobei

$\lim\limits_{h\to a} \alpha(h) = 0$. Sei $\lambda = \min\{d^2f(v,v) : \|v\|=1\}$

(existiert weil $d^2f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig)

$d^2f(a)$ pos. def $\Rightarrow \lambda > 0$

$$\Rightarrow d^2f(a)(v,v) = \|v\|^2 \, df(a)\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right) \geq \lambda\|v\|^2$$

für $v \in V\setminus\{0\}$. $\Rightarrow d^2f(a)(v,v) \geq \lambda\|v\|^2$ f.a. $v \in V$.

$$\Rightarrow f(a+h) - f(a) \geq (\lambda + \alpha(h))\|v\|^2.$$

Wähle $\varepsilon > 0$ mit $|\alpha(h)| < \frac{\lambda}{2}$ für $\|h\| < \varepsilon$

Für $x \in B_\varepsilon(a)\setminus\{a\}$, $x = a+h$ gilt

$$f(x) - f(a) \geq \frac{\lambda}{2}\|x-a\|^2 > 0 .$$

(ii) Analog (iii) $\exists\, v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $d^2f(a)(v,v) > 0$,
$d^2f(a)(w,w) < 0$. Seien $g : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$, $\tilde{g} : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$

$g(t) = f(a+tv)$, $\tilde{g}(t) = f(a+tw)$. Dann gilt

$g'(0) = df(a)\cdot v = 0$, $g''(0) = d^2f(a)(v,v) > 0$

$\Rightarrow$ g strenges lok. Min in a
$\tilde{g}$ —"— Max in a $\Rightarrow$ Beh. ∎

**3.5.5 Bemerkung** (i) $d^2f(a)$ pos. def. (bzw. neg. def, indef)
$\iff H_f(a)$ —"—

(ii) Sei $H \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ symmetrisch, $H = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$b_{11} > 0$, $\det H > 0 \implies H$ pos. def.

$b_{11} < 0$, $\det H > 0 \implies H$ neg def.

$\det H < 0 \implies H$ indefinit

(iii) $H \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch

$H$ pos. def $\iff$ alle EW $> 0$
$H$ neg def $\iff$ —"— $< 0$
$H$ indef. $\iff \exists\, \lambda, \mu$ EW, $\lambda > 0$, $\mu < 0$.

3.5.6. Extremwertbestimmung

Sei $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$. Gesucht sind die lokale Extrema von $f$.

Schritt 1 Bestimme die kritischen Punkten d.h. Lösungen des Syst. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$

Schritt 2 Sei $a$ ein krit. Pkt. Berechne $H_f(a)$ und deren EW.

- Alle EW $> 0 \implies$ strenges lok. Min
- Alle EW $< 0 \implies$ —"— Max
- $\exists$ Pos. und neg EW $\implies$ kein Extremum
- 0 ist EW $\rightsquigarrow$ wir können nicht entscheiden und müssen eventuell eine Taylorformel höherer Ordnung benutzen.

Dann betrachtet man andere krit. Pkt.

Kritische Punkte $a \in \mathbb{R}^n$ mit $H_f(a)$ nicht singulär und indefinit heißen Sattelpunkte.

Wir betrachten nun Extrema mit <u>Nebenbedingungen</u>. Bisher haben wir Extrema von Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ <u>offen</u> studiert. Wir suchen nun

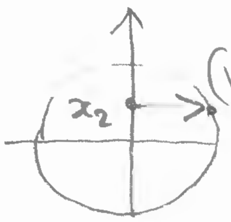
$$\min_M f, \quad \max_M f, \quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; M = \varphi^{-1}(0), \; \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Die Gleichung $\varphi = 0$ heißt Nebenbedingung.

<u>Bsp.</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1$, $M = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\} = \varphi^{-1}(0)$, wobei $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$.

Man sieht sofort, dass $\max_M f = f(1,0) = 1$ und $\min_M f = f(-1,0) = -1$. Aber $\operatorname{grad} f(x) = (1,0) \neq (0,0)$ für alle $x \in M$. Wir können also nicht die übliche Kriterien direkt anwenden. Wir können aber das Problem zu einem Extremum-Problem für eine Funktion von <u>einer</u> Variablen auf einer <u>offenen</u> Menge in $\mathbb{R}$ durch auflösung der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = 1$ nach einer Variablen: $x_1 = \sqrt{1 - x_2^2}$ für $x_1 > 0$, $x_2 \in (-1, 1)$ und ersetze $f$ durch die Zusammensetzung $(-1,1) \ni x_2 \longmapsto (\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \xmapsto{f} \sqrt{1-x_2^2}$

Diese Funktion hat ein Maximum in $x_2 = 0$.



$(\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \xrightarrow{f} f(\sqrt{1-x_2^2}, x_2)$

Betrachten wir $f, \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, stetig diffbar, $M = \varphi^{-1}(0)$ und $\operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Dies bedeutet geometrisch, dass $M$ ein Tangentialraum in jedem Punkt $x \in M$ hat.

Sei $a \in M$ ein Extremum von $f|_M$. Wir nehmen an, dass es eine Umgebung $U = U' \times U'' \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ gibt, so dass wir $\varphi(x) = 0$, $x \in U$ nach der Variablen $x_1, \dots, x_{n-1}$ auflösen können, d.h. $\exists \psi : U' \to U''$ stetig diffbar mit $\varphi(x) = 0, x \in U \iff x_n = \psi(x_1, \dots, x_{n-1}), x \in U$

also $M \cap U = \text{Graph}(\psi)$. Der Satz über implizite Funktionen besagt, dass dies möglich ist.

Die Funktion $U' \ni (x_1, \dots, x_{n-1}) \overset{g}{\longmapsto} f(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{=:x'}, \psi(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{=x'}))$ hat ein Extremum in $(a_1, \dots, a_{n-1}) = a' \in U'$

Fermatsche Kriterium $\rightsquigarrow$ $\text{grad}\, g(a') = 0$ also für $1 \le j \le n-1$

$$0 = \partial_j g(a') = \partial_j f(a', \psi(a')) + \partial_n f(a', \psi(a')) \cdot \partial_j \psi(a').$$

Wir merken nun, dass $(x', \psi(x')) \in M = \varphi^{-1}(0)$ für alle $x' \in U'$ also $\varphi(x', \psi(x')) = 0$ für alle $x' \in U'$.

$$\rightsquigarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x', \psi(x')) = \partial_j \varphi(x', \psi(x')) + \partial_n \varphi(x', \psi(x')) \cdot \partial_j \psi(x')$$

$$\rightsquigarrow \text{grad}\, \varphi(x', \psi(x')) \perp (0, \dots, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, \partial_j \psi(x')), \; 1 \le j \le n-1$$

Analog $\text{grad}\, f(a', \psi(a')) \perp (0, \dots, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, \partial_j \psi(a')), \; 1 \le j \le n-1$

Nun sind die Vektoren $(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, \partial_j \psi(x'))$ linear unabhängig (leichte Übung) und $\text{grad}\, \varphi(a', \psi(a')) \neq 0$ ist ein Erzeuger von $\langle (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{. Stelle}}, 0, \dots, \partial_j \psi(a')) \rangle^{\perp}_{1 \le j \le n-1}$

$\rightsquigarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \; . \; \text{grad}\, f(a) = \lambda \, \text{grad}\, \varphi(a)$.

## 3.5.7 Multiplikatorenregel von Lagrange

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ diffbar, $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $M = \varphi^{-1}(0) \subset U$. Sei $a \in M$ ein lokales Extremum von $f|_M$. Falls $\operatorname{grad} \varphi(a) \neq 0$, so gibt es $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (Lagrange-Multiplikator) mit $\operatorname{grad} f(a) + \lambda_0 \operatorname{grad} \varphi(a) = 0$

Äquivalent: die Funktion $L: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \varphi(x)$ hat einen kritischen Punkt in $(a, \lambda_0)$.

<u>Rezept</u> zur Bestimmung der Kandidaten für Extremstellen von $f|_M$:

- bilde die Lagrange-Fkt $L: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(x,\lambda) = f + \lambda \varphi$.
- suche Lösungen von $\operatorname{grad} L(x, \lambda) = 0 \iff$

$$\partial_j f(x) + \lambda \partial_j \varphi(x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} L(x, \lambda) = \varphi(x) = 0.$$

Wenn $(a, \lambda_0)$ eine Lösung ist so ist $a$ ein Kandidat für Extremstelle; $\lambda_0$ kann man nun vergessen.

<u>Beispiel</u> $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j > 0, j = 1, \dots, n\}$

$f: U \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 x_2 \cdots x_n$.

Suche Extrema unter Nebenbedingungen $x_1 + \dots + x_n = 1$ d.h. von $f|_M$, $M = \varphi^{-1}(0)$, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - 1$.

Es gilt $\operatorname{grad} \varphi(x) = (1, \dots, 1) \neq 0$. Sei $x \in U$ ein lokales Extremum von $f|\varphi^{-1}(0)$ $\rightsquigarrow$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit

$\operatorname{grad} f(x) = \lambda \operatorname{grad} \varphi \iff (x_2 \cdots x_n, \dots, x_1 \cdots x_{n-1}) = (\lambda, \dots, \lambda)$

$\Longleftrightarrow \quad x_1 = \dots = x_n = \dfrac{x_1 \cdots x_n}{\lambda}$ ; wegen $x_1 + \dots + x_n = 1$

$\rightsquigarrow \quad x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$. Wert von $f$ dort ist $\frac{1}{n^n}$.

Behauptung: $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ ist tatsächlich das Maximum von $f|\varphi^{-1}(0)$.

In der Tat! Betrachte $\overline{\varphi^{-1}(0)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} x_1 + \dots + x_n = 1 \\ x_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right\}$