Umkehrsatz und Satz über implizite Funktionen 4.7.2016

Wir betrachten die Gleichung für $a>0$ und $x>0$.

$$x^2 = a \overset{x>0}{\iff} x = \frac{a}{x} \iff 2x = x + \frac{a}{x} \iff x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) =: f(x)$$

Wir definieren die Folge:

$$x_0 = a,\ x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Konvergiert diese Folge gegen den Fixpunkt $x = f(x)$, dh. gegen $x = \sqrt{a}$? Bsp. $a = 2$

$x_0 = 2$; $x_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $x_2 = 1{,}416$; $x_3 = 1{,}414\ldots$

Unter bestimmten Annahmen stimmt das. Dazu die folgende Definition:

<u>Def.</u>: Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f: X \to X$ heißt <u>Kontraktion</u>, falls es ein $q \in [0,1)$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \le q\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X,$$

dh. f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $q \in [0,1)$.

<u>Satz (Banachscher Fixpunktsatz)</u>

Ist (X,d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum, und ist $f: X \to X$ eine Kontraktion, so hat f genau einen Fixpunkt $\xi \in X$. Für jedes $x \in X$ konvergiert die Folge

$$x_0 := x,\ x_{n+1} := f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

gegen ξ und es gilt die Abschätzung $d(x_n, \xi) \le \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$.

<u>Beweis</u>: Sei $x_0 \in X$ bel. Definiere $x_{n+1} = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Dann folgt $d(x_{n+1}, x_n) \le q\, d(x_n, x_{n-1}) \le \ldots \le q^n d(x_1, x_0)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) &\le d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\le (q^{n+p-1} + \ldots + q^n)\, d(x_1, x_0) \\
&= \frac{q^n}{1-q} \underbrace{(1-q)(q^{p-1} + \ldots + 1)}_{= 1-q^p} d(x_1, x_0) \\
&= \frac{q^n(1-q^p)}{1-q} d(x_1, x_0) \le \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \quad \forall p \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X.

Da X vollständig ist existiert ein Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Da eine Kontraktion stetig ist, folgt

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

<u>Eindeutigkeit</u>: Sei ξ ein weiterer Fixpunkt, dann folgt $d(\xi, x) = d(f(\xi), f(\eta)) \leq q\, d(\xi, x)$

$\overset{q<1}{\Longleftrightarrow}$ $d(\xi, x) = 0$ $\overset{(M1)}{\Longleftrightarrow}$ $\xi = x$. $\boxtimes$

<u>Bemerkung</u>: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^1(D, D)$. Dann gilt nach dem Schrankensatz

$$\| f(y) - f(x) \| \leq \sup_{t \in [0,1]} \| df((1-t)x + ty) \|_{op} \, \| y - x \|$$

$\Rightarrow$ f ist Kontraktion, falls $\sup_{x \in D} \| df(x) \|_{op} < 1$.

<u>4.2. Def</u>: Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

- $f: D \to G$ heißt <u>C^k-Diffeomorphismus</u>, wenn $f \in C^k(D, G)$, f bijektiv und $f^{-1} \in C^k(G, D)$ ist
- f heißt <u>lokaler C^k-Diffeomorphismus in $a \in D$</u>, wenn offene Umgebungen U von a und V von $f(a)$ existieren, so dass $f: U \to V$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.
- f heißt <u>lokaler C^k-Diffeomorphismus</u>, wenn f ein lokaler C^k-Diffeomorphismus in jeden $x \in D$ ist.

<u>Beispiele</u>: 1) $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist C^∞-Diffeomorphismus mit $\exp^{-1} = \log: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

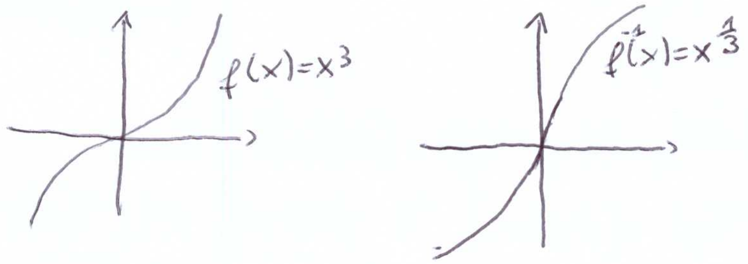
2) $P: (0,\infty) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}$ ist C^∞-diffbar

$\quad (r, \varphi) \longmapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$$P^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x < 0 \end{cases} \right)$$

P ist C^∞-Diffeomorphismus

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ ist C^∞, bijektiv aber kein Diffeomorphismus, weil $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ nicht diffbar in $y=0$ ist



f ist lokaler C^∞-Diffeomorphismus in allen $x \neq 0$.

4) $P: (0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ kein Diffeomorphismus, da nicht injektiv $P(r,\varphi) = P(r, 2\pi k + \varphi)\ \forall k \in \mathbb{Z}$

Weitere Beispiele wären Kugelkoordinaten oder noch allgemeiner Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$.

<u>4.3 Satz</u> Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Sei $f: D \to G$ ein C^k-Diffeomorphismus, $x \in D$, $y = f(x)$.
Dann gilt $d(f^{-1})(y) = [df(x)]^{-1}$ und $J_{f^{-1}}(y) = [J_f(x)]^{-1}$.
Insbesondere gilt $m = n$.

$f(f^{-1}(y)) = id\, y = y$
$df(\underbrace{f^{-1}(y)}_{x}) \circ df^{-1}(y) = I$ (2)
$\phantom{df(f^{-1}(y)) \circ df^{-1}}{}_{f(x)} = df(x) \circ df^{-1}(f(x))$

<u>Beweis:</u> $f^{-1}(f(x)) = id(x) = x$
Nach der Kettenregel folgt

$$I = d\, id(x) = d\left(f^{-1}(f(x))\right) = df^{-1}(f(x)) \circ df(x) \quad (1)$$

$$\overset{(1)+(2)}{\Longrightarrow} df^{-1}(f(x)) = [df(x)]^{-1}. \quad \blacksquare$$

<u>4.4 Satz</u> Sei $f: \underset{\text{offen}}{D} \to G$ ein Homöomorphismus mit $f \in C^k(D,G)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent
(i) f ist ein C^k-Diffeomorphismus
(ii) $df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist für jedes $x \in D$ ein Isomorphismus.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt aus Satz 4.3
<u>(ii) $\Rightarrow$ (i) z.z. $f^{-1} \in C^k(G,D)$:</u>

Sei $y \in G$. Wähle k so klein, dass $y + k \in G$ und setze $x := f^{-1}(y)$; $h := f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$.

Da $f \in C^k(D, \mathcal{Y})$

$$\underbrace{f(x+h)}_{\substack{\| \\ f(f^{-1}(y)+f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)) \\ = f(f^{-1}(y+k)) = y+k}} = \underbrace{f(x)}_{\substack{\| \\ f(f^{-1}(y)) \\ \| \\ y}} + df(x)\underbrace{h}_{\substack{\| \\ f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}} + R(h) \quad \text{mit } \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0 \qquad \Big| -y \Big| [df(x)]^{-1} \circ$$

$$\Rightarrow [df(x)]^{-1} k = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) + [df(x)]^{-1} R(h)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y+k) = f^{-1}(y) + [df(x)]^{-1} k \underbrace{- [df(x)]^{-1} R(f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y))}_{=: R^*(k)} \quad (1)$$

Zu zeigen $\lim_{k \to 0} \frac{\|R^*(k)\|}{\|k\|} = 0$: $\quad c := \|df(x)\|^{-1}$

f diffbar: $\exists r > 0 : \forall h \in B_r(0)$ gilt $\|R(h)\| \leq \frac{1}{2c} \|h\| \quad (2)$

f^{-1} stetig: $\exists \delta > 0 : \forall \|k\| \leq \delta$: $\|h\| = \| f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) \| \leq r \quad (3)$

$$\Rightarrow \|R^*(k)\| \leq \|[df(x)]^{-1}\| \, \|R(f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y))\|$$
$$\overset{(2)(3)}{\leq} \frac{1}{2} \|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)\| \quad \forall \|k\| \leq \delta \quad (4)$$

Ausgehend von (1) ergibt sich

$$\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)\| \leq \|[df(x)]^{-1}\| \, \|k\| + \underbrace{\|R^*(k)\|}_{\overset{(4)}{\leq} \frac{1}{2} \|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)\|}$$

$$\Rightarrow \|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)\| \leq 2 \|[df(x)]^{-1}\| \, \|k\|$$

Für $\|k\| \leq \delta$, $k \neq 0$ folgt:

$$\frac{\|R^*(k)\|}{\|k\|} \leq \|[df(x)]^{-1}\| \frac{\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)\|}{\|k\|} \frac{\|R(f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y))\|}{\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)\|}$$
$$\leq 2 \|[df(x)]^{-1}\| \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[k \to 0]{} 0,$$

da wegen der Stetigkeit von f^{-1} aus $k \to 0$, $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) \to 0$ folgt.

Zu zeigen df^{-1} ist stetig:

$$df^{-1}(y) = [df(f^{-1}(y))]^{-1} \text{ nach } (1)$$

$\Rightarrow df^{-1} = \mathrm{Inv} \circ df \circ f^{-1}$ eine Verkettung von stetigen Funktionen und somit auch selbst stetig.

$f \in C^k$ folgt per Induktion aus der Aussage für $f \in C^{k-1}$ $\boxtimes$

7.7.2016

4.5 Umkehrsatz

Seien $D, G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(D, G)$, $a \in D$, $y_0 = f(a) \in G$.
Ist $df(a)$ ein Isomorphismus, so ist f ein lokaler C^k-Diffeomorphismus in a.

Beweis: Schritt 0: f vereinfachen

O.B.d.A $a = 0$ und $y_0 = f(a) = 0$. Andernfalls betrachte
$\tilde{f}(x) := f(x+a) - y_0$ mit $\tilde{f}(0) = f(a) - y_0 = y_0 - y_0 = 0$
und $d\tilde{f}(0) = df(0+a) = df(a)$ ist Isomorphismus

O.B.d.A. $df(0) = id$ sonst betrachte $\tilde{\tilde{f}}(x) := [df(0)]^{-1} f(x)$
und dann ist $d\tilde{\tilde{f}}(x) = d[[df(0)]^{-1} f(x)] = [df(0)]^{-1} df(x)$
$\Rightarrow d\tilde{\tilde{f}}(0) = [df(0)]^{-1} df(0) = I_n$

Schritt 1: Konstr. einer stetigen Umkehrabbildung

Betrachte $g_y(x) := y + x - f(x)$.
$\Rightarrow x = g_y(x) = y + x - f(x) \Leftrightarrow y = f(x)$, d.h. die Fixpunkte von g_y sind gleich die Urbilder von y unter f.

Wähle $r > 0$ so groß, dass $\overline{B_{2r}(0)} \subset D$ und

$$\| \underbrace{id_x}_{d\tilde{\tilde{f}}(x)} - df(x) \| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x, \|x\| \leq 2r \qquad (1)$$

Das geht, da df stetig ist, denn $f \in C^1$.

Wegen $dg_y = id_x - df$ impliziert der Schrankensatz für $x_1, x_2 \in \overline{B_{2r}(0)}$

$$\| g_y(x_2) - g_y(x_1) \| \leq \sup_{t \in [0,1]} \| dg_y((1-t)x_1 + tx_2) \|_{op} \|x_2 - x_1\|$$
$$\overset{(1)}{\leq} \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\|, \ \forall x_1, x_2 \in \overline{B_{2r}(0)} \qquad (2)$$

Damit folgt für $y \in B_r(0)$ und $x \in \overline{B_{2r}(0)}$

$$\| g_y(x) \| \leq \| g_y(x) - g_y(0) \| + \|y\| \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{2} \|x - 0\| + \|y\| \leq \frac{1}{2} \cdot 2r + r = 2r \qquad (3)$$

$\Rightarrow g_y(\overline{B_{2r}(0)}) \subset \overline{B_{2r}(0)} \ \forall y \in B_r(0)$ und g_y ist eine Kontraktion mit $q \leq \frac{1}{2}$ nach (2). $\overline{B_{2r}(0)}$ ist als abg. Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ebenfalls vollständig.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat jedes g_y genau einen Fixpunkt $x \in \overline{B_{2r}(0)}$ und dieser ist nach (3) in $B_{2r}(0)$ (offen).

$\Rightarrow \forall y \in B_r(0) \; \exists x \in B_{2r}(0)$ mit $g_y(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Setze $h(y) := x$; $V := B_r(0)$, $U_0 := f^{-1}(V) \cap B_{2r}(0)$, $h: V \to U_0$.

<u>Schritt 2: h ist stetig</u>: Seien $y_1, y_2 \in V$ und $x_1 = h(y_1), x_2 = h(y_2)$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = (0 + x_2 - f(x_2)) - (0 + x_1 - f(x_1)) + f(x_2) - f(x_1)$$
$$= g_0(x_2) - g_0(x_1) + f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Rightarrow \|x_2 - x_1\| \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| + \|f(x_2) - f(x_1)\| \quad \Big| -\frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| \quad \Big| \cdot 2$$

$$\Rightarrow \|h(y_2) - h(y_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| \leq 2\|y_2 - y_1\|,$$

das heißt h ist Lipschitzstetig und insbesondere auch stetig.

<u>Schritt 3: $df(x)$ ist ein Isomorphismus $\forall x \in U_0$:</u>

Wegen der Wahl von r und $U_0 = f^{-1}(V) \cap B_{2r}(0) \subset B_{2r}(0)$ gilt $\|(\mathrm{id}(x) - df(x))v\| \leq \frac{1}{2}\|v\| \;\; \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Ist $df(x)v = 0 \Leftrightarrow \|v\| \leq \frac{1}{2}\|v\| \Leftrightarrow \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

$\Rightarrow \ker df(x) = \{0\}$, ~~dies~~ das heißt $df(x)$ ist invertierbar.

<u>Schritt 4</u>

Nach Schritt 2 und 3 ist $(f|_{U_0})^{-1} = h$ stetig & $df(x)$ ist Isomorphismus $\forall x \in U_0 \overset{\text{Satz 4.4}}{\Longrightarrow} f|_{U_0}: U_0 \to V$ ist Diffeomorphismus. ∎

<u>Bemerkung</u>: • $df(a)$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $\det J_f(a) \neq 0$.

• Der Satz besagt:

Hat $df(a)v = w$ eine eindeutige Lösung $v \; \forall w \in \mathbb{R}^n$, d.h. $\det J_f(a) \neq 0 \Rightarrow f(x) = y$ lässt sich nahe bei a bzw. y_0 eindeutig lösen.

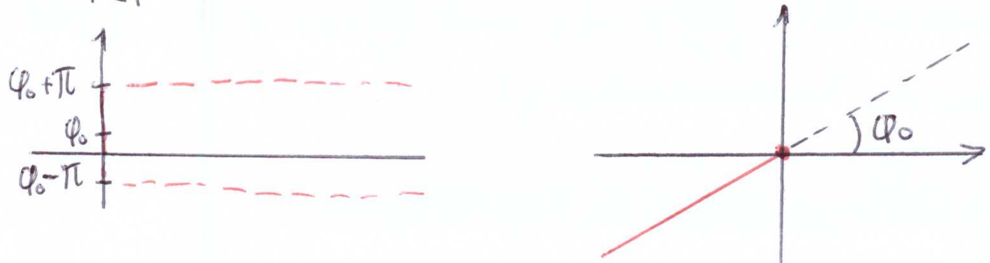
4.6 Folgerung (Diffeomorphiesatz)

Seien $D, G \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in C^k(D,G)$ bijektiv, $k \geq 1$. Falls $df(a)$ für jedes $a \in D$ invertierbar ist, so folgt $f^{-1} \in C^k(G,D)$, d.h. f ist ein C^k-Diffeomorphismus.

Beweis: klar.

Beispiel: Betrachte nochmal Polarkoordinatenabbildung

$$P: \mathbb{R}_+ \times (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{t(-\cos\varphi_0, -\sin\varphi_0) \mid t \geq 0\}$$



Für alle $(r,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)$ gilt

$$J_P(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_P(r,\varphi) = r \neq 0$$

$\Rightarrow$ $dP(r,\varphi)$ ist für jedes $(r,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)$ invertierbar. Außerdem ist P bijektiv (Hausaufgabe)

$\overset{4.6}{\Rightarrow}$ $P: \mathbb{R}_+ \times (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{t(-\cos\varphi_0, -\sin\varphi_0) \mid t \geq 0\}$ ist ein C^∞-Diffeomorphismus.

Bemerkung: Ohne die Voraussetzung der Bijektivität ist der Diffeomorphiesatz falsch. Betrachte

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

$$\Rightarrow J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J_f(x,y) = e^{2x}\cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Aber: $f(x, y+2k\pi) = (e^x \cos(y+2k\pi), e^x \sin(y+2k\pi))$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ $\qquad = (e^x \cos y, e^x \sin y) = f(x,y)$

und f ist somit nicht injektiv.

Allerdings erfüllt f die Voraussetzungen des Umkehrsatzes und ist somit ein lokaler Diffeomorphismus.

Satz über implizite Funktionen

Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto y-x^2$ und $(x_0,y_0) = (0,0)$, $z_0 = 0$. Dann ist

$y - x^2 = 0$ auflösbar durch $y = g(x) = x^2$ bei $x_0 = 0$

Nach x kann die Gleichung nicht aufgelößt werden, denn

$$x = \begin{cases} \pm\sqrt{y} & y \geq 0 \quad \text{mehrdeutig und nicht diffbar in } 0. \\ \text{nicht def.} & y < 0 \end{cases}$$

Dazu bemerken wir $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ insbesondere $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$ und andererseits $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Gibt es da einen Zusammenhang?

4.7 Satz über implizite Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^{k+m}$ offen, $f \in C^\ell(U, \mathbb{R}^m)$, $(x_0,y_0) \in U$, $z_0 = f(x_0,y_0)$.
Sei $d_y f(x_0,y_0)$ definiert durch

$$d_y f(x_0,y_0) \underset{\substack{\Uparrow \\ \mathbb{R}^m}}{\tilde{h}} := df(x_0,y_0)(0,\tilde{h}) \in \mathbb{R}^m.$$

Angenommen $d_y f(x_0,y_0)$ ist invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung der Form $V \times W \subset U$ von (x_0,y_0) und eine Abbildung $g \in C^\ell(V,W)$ mit $g(x_0) = y_0$ so, dass für alle $(x,y) \in V \times W$ gilt:

$$f(x,y) = z_0 \iff y = g(x) \qquad \forall (x,y) \in V \times W$$

<u>Beweis:</u> Betrachte $\Phi: U \longrightarrow \mathbb{R}^{k+m}$, $\Phi(x,y) := (x, f(x,y))$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d\Phi(x_0,y_0)[h,k] &= (d(id_x)(x_0,y_0)[h,k],\ df(x_0,y_0)[h,k]) \\
&= (Id[h] + 0[k],\ df(x_0,y_0)[h,0] + df(x_0,y_0)[0,k]) \\
&=: (h,\ d_x f(x_0,y_0)h + d_y f(x_0,y_0)k) \\
&= \begin{pmatrix} Id & 0 \\ d_x f(x_0,y_0) & d_y f(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \det d\Phi(x_0,y_0) = \det d_y f(x_0,y_0) \neq 0$ nach Voraussetzung

$\Rightarrow d\Phi(x_0,y_0)$ ist ein Isomorphismus

Nach dem Umkehrsatz 4.5 gibt es eine Umgebung D von (x_0,y_0) und G von $\Phi(x_0,y_0) = (x_0,z_0)$ derart, dass

$\Phi : D \to \mathcal{G}$ ein C^ℓ-Diffeomorphismus ist mit $\Phi^{-1} : \mathcal{G} \to D$. Wegen der besonderen Struktur von Φ gibt es ein $h \in C^\ell(\mathcal{G}, \mathbb{R}^m)$, so dass für $(\xi, \eta) \in \mathcal{G}$ folgt

$$\Phi^{-1}(\xi, \eta) = (\xi, h(\xi, \eta))$$

Für ein $(x,y) \in D$ gilt:

$$f(x,y) = z_0 \iff \Phi(x,y) = (x, f(x,y)) = (x, z_0)$$
$$\iff (x,y) = \Phi^{-1}(x, z_0) = (x, h(x, z_0)) \iff y = h(x, z_0)$$

Insbesondere gilt $h(x_0, z_0) = y_0$

$\overset{h \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ eine Umgebung V von x_0 und eine Umgebung W von y_0 mit $V \times W \subset \mathcal{G}$ und so, dass für $x \in V$ $h(x, z_0)$ in W liegt.

Def. $g : V \to W$ durch $g(x) = h(x, z_0)$. Dieses g hat die gewünschten Eigenschaften. $\blacksquare$