Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Übungen in der zweiten Vorlesungswoche

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Beweisen Sie:

a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x(1-x)^n$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

b) $g_n := n \cdot f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion. (Tipp: $g_n(\frac{1}{n}) = ?$)

Sei $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h_n(x) := nxe^{-nx^2}$.

c) Konvergieren die h_n punktweise? Falls ja, gegen welche Funktion?

d) Auf welchen abgeschlossenen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ konvergieren die h_n gleichmäßig? (Tip: Funktionendiskussion)

Lösung:

a) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. OBdA $\varepsilon < 1$. Dann gilt: Falls $x \in [0,\varepsilon] : |f_n(x)| = |x(1-x)^n| \leq |x| \leq \varepsilon$ für alle n falls $x \in [\varepsilon, 1] : |f_n(x)| = |x(1-x)^n| \leq (1-x)^n \leq (1-\varepsilon)^n$. Dies ist $< \varepsilon$ für $n > \log\varepsilon / \log(1-\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f\|_{[0,1]} < \varepsilon$ für alle $n \geq \left[\frac{\log\varepsilon}{\log(1-\varepsilon)}\right] + 1$.

b) Für $x \in (0,1) : g_n(x) = n\ x(1-x)^n \to 0$, für $n \to \infty$ (in der Tat, $\lim_{n\to\infty} n\ q^n = 0$ für $|q| < 1$; Beweis: z.B. weil die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ konvergent ist ; dies folgt mit dem Quotientenkriterium; oder schreibe $\frac{1}{|q|} = 1 + x$, $x > 0$; dann $\frac{1}{|q|^n} = (1+x)^n \geq \binom{n}{2}x^2 = \frac{n(n-1)}{2}\ x^2$ usw.) Für $x = 0$: $g_n(x) = n \cdot 0 \cdot 1 = 0$ für alle n; also punktweise Konvergenz. Würde (g_n) gleichmässig gegen die Nullfunktion konvergieren, so gelte auch : $\max g_n = \|g_n\|_D \to 0$ $(g_n \geq 0)$. Es ist aber z.B. $g_n(\frac{1}{n}) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n})^n \to e^{-1}$ also gibt es $N \in \mathbb{N}$, mit $\max g_n \geq \frac{1}{2e}$ für alle $n \geq N$ also $\max g_n \nrightarrow 0$.

c) $x = 0 \Rightarrow h_n(x) = 0$; $x \neq 0 \Rightarrow h_n(x) = \frac{1}{x}\ nx^2 \cdot e^{-nx^2} \to 0, n \to \infty$ weil $y = nx^2 \to \infty$ und $ye^{-y} \to 0$ für $y \to \infty$. Also $h_n \to 0$ punktweise.

d) Wir bestimmen die Extrema von h_n: $h_n'(x) = ne^{-nx^2} - 2n^2\ x^2\ e^{-nx^2} = (1 - 2x^2 n)ne^{-nx^2}$.

Auf $(-\infty, 1/\sqrt{2n})$ nimmt h_n ihr Minimum in $-\frac{1}{\sqrt{2n}}$ und $h_n(-\frac{1}{\sqrt{2n}}) < 0$.

Auf $(\frac{1}{\sqrt{2n}}, \infty)$ ist $h_n > 0 \Rightarrow \min\ h_n = h_n(-\frac{1}{\sqrt{2n}}) = -\sqrt{\frac{n}{2}}\ e^{-1/2}$.

Analog $\max h_n = \sqrt{\frac{n}{2}}\ e^{-1/2}$. Also $\|h_n\|_{\mathbb{R}} = \sqrt{\frac{n}{2}}\ e^{-1/2}$.

- Ist $I = \{0\}$ so konvergiert (h_n) gleichmäßig auf I gegen 0.
- Ist $0 \in I \neq \{0\}$ so konvergiert (h_n) nicht gleichmäßig auf I, denn für n groß genug $1/\sqrt{2n} \in I$ oder $-1/\sqrt{2n} \in I$ also $\|h_n\|_I = \sqrt{\frac{n}{2}}\ e^{-1/2}$ und $\sqrt{\frac{n}{2}}\ e^{-1/2} \to \infty, n \to \infty$.

- Ist $0 \notin I$ so konvergiert (h_n) gleichmäßig: sei $a = \min I > 0$; für alle n mit $1/\sqrt{2n} < a$ ist $h_n' < 0$ auf I, also wegen $h_n|_{\mathbb{R}_+} > 0$ gilt $\|h_n\|_I = h_n(a) \to 0$, für $n \to \infty$. Falls $b = \max I < 0$ so analog $\|h_n\|_I = |h_n(b)| \to 0, n \to \infty$.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei $D \subset \mathbb{C}$, und seien $f_n : D \to \mathbb{C}$, $g_n : D \to \mathbb{C}$ zwei Folgen von Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ bzw. $g : D \to \mathbb{C}$ konvergieren. Zeigen Sie:

a) Die Funktionenfolge $f_n + g_n$ konvergiert gleichmäßig gegen $f + g$.

b) Falls die f_n , g_n beschränkte Funktionen sind, so konvergiert die Funktionenfolge $f_n \cdot g_n$ gleichmäßig gegen $f \cdot g$. (Tip: Es gibt eine *gemeinsame* Schranke für alle $|f_n|$, warum?)

Lösung:

a) Es gilt für $n \to \infty$

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_D = \|(f_n - f) + (g_n - g)\|_D \le \|f_n - f\|_D + \|g_n - g\|_D \to 0$$

b) Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f - f_n\|_D < 1$ für alle $n \ge N$. Deshalb $\|f\|_D \le \|f_N\|_D + 1 < \infty$ also f ist beschränkt. Es folgt auch, dass $\|f_n\|_D \le \|f\|_D + 1$ für alle $n \ge N$; also für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|f_n\|_D \le C := \max \{ \|f_1\|_D, \cdots, \|f_{N-1}\|_D, \|f\|_D + 1\}$. Analog $\|g\|_D < \infty$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_D &= \|f_n g_n - f_n g + f_n g - fg\|_D = \|f_n(g_n - g) + (f_n - f)g\|_D \\ &\le \|f_n\|_D \|g_n - g\|_D + \|f_n - f\|_D \ \|g\|_D \\ &\le C \underbrace{\|g_n - g\|_D}_{\to 0} + \underbrace{\|f_n - f\|_D}_{\to 0} \|g\|_D \to 0\,, \qquad \text{für } n \to \infty.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Zeigen sie, daß für $x \in (-1, 1)$ gilt:

a) $\arctan x \ = \ x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} \pm \ \dots$

b) $\arcsin x \ = \ x + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \dfrac{x^7}{7} + \ \dots$

Anleitung: Entwicklen Sie jeweils zunächst die *Ableitung* der genannten Funktionen in eine Potenzreihe (man braucht dazu übrigens nicht auf die Definition der Taylorreihe zurückzugreifen).

Lösung:

a) Mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \ 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots\,, \quad x \in (-1, 1)\,.$$

Diese Reihe hat Konvergenzradius 1. Laut Vorlesung darf im Konvergenzbereich gliedweise integriert werden. Also folgt für $x \in (-1, 1)$:

$$\int_0^x \arctan' t \, dx = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots) \, dt = \int_0^x 1dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt - \ldots$$

also

$$\arctan x - \underbrace{\arctan 0}_{=0} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot$$

b) $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} = B_{-1/2}(-x^2)$ (Binominalreihe mit $|-x^2| < 1$). Also

$$\begin{aligned} B_{-1/2}(-x^2) &= \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k \\ &= 1 + (-\frac{1}{2})(-x^2) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(-x^2)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(-x^2)^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

Mit dem gleichen Argument wie in (a) und $\arcsin 0 = 0$ folgt

$$\arcsin x = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ \ldots$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Zeigen Sie:

a) $\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ \ldots}$ (Leibnizsche Reihe für π)

b) $\boxed{\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \ \ldots}$

Anleitung: (a) Das Leibniz-Kriterium liefert die Abschätzung

$$|\arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}| \leqslant \frac{|x^{2k+3}|}{2k+3}$$

für alle $x \in (-1, 1)$.
(b) Sind $s_n(x)$ die Partialsummen der Reihe, so gilt $s_n(x) < \arcsin x < \arcsin 1$ für alle $x \in (0, 1)$. Was passiert für $x \to 1$?

Aufgabe 5 **4 Punkte**

Sei $s \in \mathbb{R}$, und sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = (1+x)^s$ definiert.

1. Zeigen Sie: Die Taylorreihe zu f in 0 ist die Binomialreihe $B_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$.

2. Zeigen Sie, dass f zumindest auf $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ durch diese Taylorreihe dargestellt wird. *Tipp:* Lagrange-Restglied; überlegen Sie, dass $\binom{s}{n}\lambda^n \to 0$ für $n \to \infty$ und $|\lambda| < 1$.)

Zusatz: Zeigen Sie, dass (b) auch auf $(-1, 1)$ gilt. (Tipp: Cauchy-Restglied)
Es gilt also die folgende Verallgemeinerung der Binomialformel:

$$\boxed{(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k \quad \text{für } x \in (-1,1) \text{ und } s \in \mathbb{R}} \tag{1}$$

Diese grundlegende Formel wurde von Newton mit 24 Jahren entdeckt, und erst ein Jahrhundert später um 1774 von Euler bewiesen.

Aufgabe 6 **4 Punkte**

a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Seien $a_n \to x_0$ und $b_n \to x_0$ Folgen in I mit $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ und $a_n < b_n$ für alle n. Zeigen Sie: $d_n := \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} \to f'(x_0)$ für $n \to \infty$.
(Tipp: Mit $f(x) = f(x_0) + r(x)(x - x_0)$ liegt d_n zwischen $r(a_n)$ und $r(b_n)$, warum?)

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt: Ist $1 \leqslant m \leqslant 2^n$ und $x \in \left[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right]$, so sei $f_n(x) := x - \frac{m-1}{2^n}$ für ungerades m und $f_n(x) := \frac{m}{2^n} - x$ für gerades m. Man überzeugt sich leicht, dass f_n wohldefiniert und stetig ist.

   i) Skizzieren Sie f_1, f_2, f_3, f_4 und $\sum_{k=1}^{4} f_k$.

   ii) Zeigen Sie, dass $f := \sum_{k=1}^{\infty} f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert und stetig ist.

   iii) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $[a_n, b_n]$ ein Intervall der Form $\left[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right]$ (wie oben), das x_0 enthält. Zeigen Sie: $\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ ist für gerades n gerade und für ungerades n ungerade, und f ist in x_0 nicht differenzierbar.

   Die Funktion f ist also stetig, aber nirgends differenzierbar.