Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Übung

Zuallererst sollt ihr die zusätzliche Übung nutzen um

- Lösungen von Aufgaben zu besprechen, zu deren Besprechung ihr in den Übungen davor nicht gekommen seid und
- Fragen der Studenten zu beantworten.

Von den folgenden Aufgaben könnt selbst eine Auswahl treffen oder auch euch was Eigenes aussuchen.

Aufgabe 1
Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, definiere

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

a) Zeige, daß $d(A,B) := \|A-B\|_2$ eine Metrik auf $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ definiert.

b) Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, eine Folge in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Zeige, daß

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \quad \text{genau dann, wenn} \quad \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \text{ für alle } 1 \leqslant i,j \leqslant n\ .$$

Folgere, daß $(M_{n\times n}(\mathbb{C}), d)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

c) Beweise, daß $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$ für alle $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

d) Zeige, daß für jedes $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ die Reihe $\exp(A) := \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}A^k$ konvergiert.

e) Berechne $\exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$

f) Zeigen Sie: Wenn $AB = BA$, dann $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Lösung:
Wir zeigen. dass $\|\cdot\|_2$ eine Norm ist. Eine Möglichkeit ist, ein Isomorphismus $M_{n\times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ zu wählen, z. B. $A \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$. Mit dieser Identifizierung ist $\|\cdot\|_2$ einfach $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{C}^{n^2}$, also eine Norm. Andere Möglichkeit: direkter Beweis (d. h. Beweis für K^{n^2} wiederholen). Aus der Identifizierung folgt sofort (b) inklusive Vollständigkeit (alles identisch mit $(\mathbb{C}^{n^2}, \|\cdot\|_2)$).
(b) Folgt aus $\frac{1}{n}\|z\|_1 \leq \|z\|_2 \leq \|z\|_1$ für $z \in K^{n^2}$, mit $z = \big(a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\big)$, $1 \leq i,j \leq n$.

(c) $\|AB\|_2^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \Big| \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\Big|^2 \underset{(1)}{\leqslant} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \big(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\big)\big(\sum\limits_{l=1}^{n} |b_{lj}|^2\big) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \cdot \sum\limits_{l,j}^{n} |b_{lj}|^2 =$ $\|A\|_2^2 \, \|B\|_2^2$, wobei bei (1) die Cauchy-Schwarz Ungleichung angewandt wurde.

(d) $(M_{n\times n}(A), \|\cdot\|_2)$ ist ein Banachraum (weil $\cong (\mathbb{C}^{n^2}, \|\cdot\|_2)$, oder weil jeder endlichdimensionaler normierter Raum ein Banachraum ist). In jedem Banachraum ist eine normal konvergente Reihe auch konvergent. Weil $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ (aus(c)) hat die Reihe $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\|A^k\|$ die konvergente Majorante $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\|A\|^k$ (Exponentialreihe zu $\|A\|$).

(e) Betrachte den Gruppen- Isomorphismus

$$(\mathbb{C}^*, \cdot) \to \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \cdot \right), \quad a + ib \underset{\phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Wegen $\phi(z^k) = \phi(z)^k$ folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^k &= \phi(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \phi((\cos\varphi + i\sin\varphi)^k) \\ &= \phi(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) = \begin{pmatrix} \cos k\varphi & -\sin k\varphi \\ \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} \cos\frac{k\pi}{2} & -\sin\frac{k\pi}{2} \\ \sin\frac{k\pi}{2} & \cos\frac{k\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^j\,\mathrm{Id}, & k = 2j \\ (-1)^j A, & k = 2j+1 \end{cases}$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} &= \exp(tA) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2!} & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{t^3}{3!} \\ -\frac{t^3}{3!} & 0 \end{pmatrix} + \ldots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \ldots & -t + \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{5!}t^5 + \ldots \\ t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \ldots & 1 - \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{4!}t^4 + \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(f) Wegen $AB = BA$ gilt $(A+B)^k = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$. Laut Vorlesung gilt der Satz über Cauchy- Produkt auch in Banachalgebren. Daraus folgt die Behauptung wie für komplexe Zahlen.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Normen $\|z\|_\infty = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$, $\|z\|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$ und $\|z\|_1 = |z_1| + \ldots + |z_n|$ auf $\mathbb{C}^n$. Finden Sie maximale Konstanten c_n, c_n' und minimale

Konstanten $C_n\,, C'_n$ mit
(a) $c_n\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant C_n\|\cdot\|_\infty$, (b) $c'_n\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant C'_n\|\cdot\|_1$.
Man kann zeigen, dass für $1 \leqslant p \leqslant q$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|x\|_q$.

Lösung:
(a)

$$\|z\|_\infty = \max\Big\{\|z_1\|, \cdots, \|z_n\|\Big\} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n \|z_k\|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \max\big\{\|z_1\|\cdots\|z_n\|\big\}^2} = \sqrt{n}\,\|z\|_\infty\,.$$

Also erfüllen $c_n = 1, C_n = \sqrt{n}$ die Ungl. Diese Konstanten sind optimal wegen $1 \cdot \|(1,0,\cdots,0)\|_\infty = 1 = \|(1,0,\cdots,0)\|_2$ und $\|(1,\cdots,1)\|_2 = \sqrt{n} = \sqrt{n}\|(1,\cdots,1)\|_\infty$.
(b) Mit Cauchy-Schwarz folgt $\|z\|_1 = \|z_1\| + \cdots \|z_n\| = \sum_{k=1}^n \|z_k\| \cdot 1 \leqslant \|z\|_2\sqrt{n}$ also

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|z\|_1 \leqslant \|z\|_2 = \sqrt{\|z_1\|^2 + \ldots + \|z_n\|^2} \leqslant \sqrt{(\|z_1\| + \ldots + \|z_n\|)^2} = \|z\|_1$$

und $c'_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $c'_n = 1$ erfüllen die Ungleichung. Diese Konstanten sind optimal wegen $\frac{1}{\sqrt{n}}\|(1,\cdots,1)\|_1 = \sqrt{n} = \|(1,\cdots,1)\|_2$ und $\|(1,0,\cdots,0)\|_2 = 1 = 1\cdot\|(1,0,\cdots,0)\|_1$.

Bemerkung
Hier könnte man erläutern, dass alle Normen von $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Der allgemeine Beweis dafür unterscheidet sich nicht wirklich von dem Beispiel Beweis.

Aufgabe 3 **4 Punkte**
Sei K ein kompakter topologischer Raum, Y ein Hausdorff-Raum und $f : K \to Y$ bijektiv und stetig. Zeigen Sie, dass f ein Homöomorphismus ist. Was läßt sich aussagen, wenn K nicht kompakt vorausgesetzt wird?

Lösung:
Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1} \text{ stetig } &\iff \forall A \subset K \text{ abgeschlossen auch } (f^{-1})^{-1}(A) \text{ abgeschlossen (Satz 8.4.6)} \\ &\iff \forall A \subset K \text{ abgeschlossen auch } f(A) \text{ abgeschlossen, da } (f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \end{aligned}$$

Sei $A \subset K$, mit A abgeschlossen. Damit ist A auch kompakt, da K kompakt. Also ist $f(A)$ auch kompakt, da f stetig ist. Damit ist $f(A)$ auch abgeschlossen, da Y Hausdorffsch ist.

Für K nicht kompakt, bspw. $K = \overline{\mathbb{R}}_+$ findet man folgende Abbildung $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}^2$:

$$f(x) := \begin{cases} (x, x) & \text{falls } s \in [0,1] \\ (1, 3-2x) & \text{falls } s \in [1,2] \\ \left(\frac{2}{x}, -\frac{2}{x}\right) & \text{falls } s \in [2,\infty) \end{cases}$$

Dies bildet $\overline{\mathbb{R}}_+$ auf $f(\overline{\mathbb{R}}_+)$ bijektiv und stetig ab (Skizze von $f(\overline{\mathbb{R}}_+)$?). Nun ist allerdings die Folge $x_n = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$ im $\mathbb{R}^2$ konvergent gegen $(0,0)$, unter f^{-1} ihre Bildfolge allerdings $f^{-1}(x_n) \to \infty \notin \mathbb{R}_+$, womit f^{-1} in diesem Beispiel nicht stetig ist.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Sei X ein metrischer Raum und $K \subset X$ folgenkompakt. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen in X mit $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine Zahl $r > 0$, so dass es zu jedem $x \in K$ ein $i \in I$ mit $B_r(x) \subset U_i$ gibt.

(b) Zu jedem $r > 0$ gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_k$ in K mit $K \subset B_r(x_1) \cup \ldots \cup B_r(x_k)$, d.h. K ist total beschränkt.

(Bemerkung: (a) und (b) ergeben offensichtlich einen Beweis dafür, dass folgenkompakte Teilmengen metrischer Räume kompakt sind. Diese Implikation kam bereits in einem Satz in der Vorlesung vor. Aussage (a) heißt auch das ***Lebesgue-Lemma*** und r heißt ***Lebesgue Zahl*** der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$.)

Lösung:

(a) Behauptung: $\exists\, r > 0 : \forall\, x \in K : \exists\, i \in I : B_r(x) \subset U_i$. Beweis: Angenommen, es gelte das Gegenteil: $\forall\, r > 0 : \exists\, x \in K : \forall\, i \in I : B_r(x) \not\subset U_i$

Sei $r = \frac{1}{n}$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in K : \forall i \in I : B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset U_i$.

Wir haben hier also eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in K, und da K kompakt ist, besitzt diese eine gegen $x \in K$ konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Im folgenden sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diese Teilfolge. Nun gibt es $i_0 \in I$ sodass $x \in U_{i_0}$, und da U_{i_0} offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_{i_0}$. Es bleibt zu zeigen, dass es ein n_0 gibt, sodass $\forall n \geq n_0 : B_{\frac{1}{n}}(x_n) \subset B_\varepsilon(x)$, denn damit wäre $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \subset U_{i_0}$, womit wir einen Widerspruch hätten.

Nun konvergiert $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ja gegen x, also gibt es einen Index n'_ε ab dem alle $x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Des weiteren gibt es n''_ε ab dem für alle n gilt $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle $n > \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\} =: n_\varepsilon$ gilt somit für beliebige $y \in B_{\frac{1}{n}}(x_n)$, dass

$$d(y, x) \leq \underbrace{d(y, x_n)}_{<\frac{1}{n}} + \underbrace{d(x_n, x)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Somit gilt ab diesem $n_0 := n_\varepsilon$, dass $\forall n \geq n_0 : B_{\frac{1}{n}}(x_n) \subset B_\varepsilon(x)$.

(b) Angenommen, die Behautung sei falsch. Wir wählen $x_1 \in K$ beliebig, $x_2 \in K \backslash B_r(x_1)$, $x_3 \in K \setminus \big(B_r(x_1) \cup B_r(x_2)\big)$ usw. Wir erhalten eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in K, die keine konvergente Teilfolge hat: wegen $d(x_n, x_m) \geq r$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist keine Teilfolge Cauchy-Folge. Somit erhalten wir einen Widerspruch zur Folgenkompaktheit von K.