

①

1. Holomorphe Funktionen

1.1. Cauchy-Riemann Gleichungen, Cauchy-Formel

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte der n -dimensionale komplexe Zahlenraum $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : z_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n\}$.

$\mathbb{C}^n$ ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum von Dimension n .

Das Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$

$$\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^n z_j \overline{w_j}, \quad z, w \in \mathbb{C}^n$$

induziert eine Norm $\|z\| = \langle z, z \rangle^{1/2}$ und die Standardtopologie auf $\mathbb{C}^n$. Damit ist $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum.

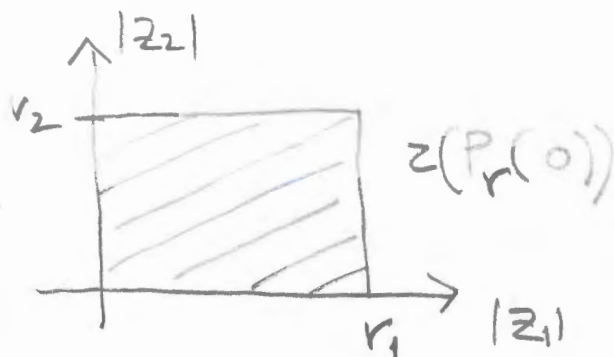
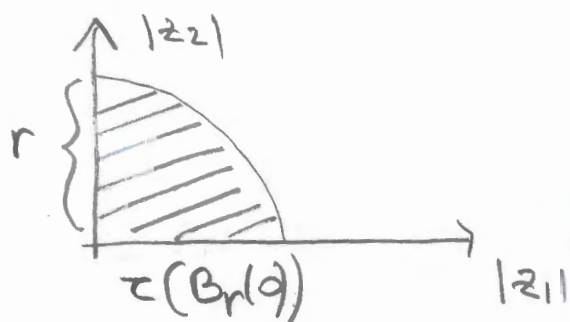
Offene Kugel mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}^n$, Radius $r > 0$:

$$B_r(a) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - a\| < r\}$$

Offener Polyzylinder mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}^n$ und Polradius $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$:

$$P_r(a) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j, 1 \leq j \leq n\}$$

$\mathbb{R}_+^n := \{r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n : r_j \geq 0, 1 \leq j \leq n\}$ heißt absoluter Raum. Es ist zweckmäßig, Gebiete in $\mathbb{C}^n$ durch ihr Bild in $\mathbb{R}_+^n$ durch $z: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n, z \mapsto (|z_1|, \dots, |z_n|)$ darzustellen.



(3)

Für $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ sei $x_j = \operatorname{Re} z_j$, $y_j = \operatorname{Im} z_j$,
 $z_j = x_j + \sqrt{-1} y_j$. Die Abbildung

$$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad z \mapsto (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$$

ist ein $\mathbb{R}$ -linearer Isomorphismus und Isometrie.
 Alle übliche Begriffe der Topologie und Analysis
 in $\mathbb{R}^{2n}$ übertragen sich auf $\mathbb{C}^n$.

Wirtinger-Ableitungen: für $j=1, \dots, n$, setze

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

1.1.1. Definition Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Funktion
 $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph in $G: \Leftrightarrow f \in \mathcal{C}^1(G)$ und
 f erfüllt die Cauchy-Riemann Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z) = 0, \quad z \in G, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Die Menge der holom. Fkten in G wird $\mathcal{O}(G)$
 bezeichnet.

Bemerkung. $f \in \mathcal{O}(G) \Leftrightarrow f \in \mathcal{C}^1(G)$ und f ist separat
 holomorph in jeder Variable. Ein tiefer Satz von
 Hartogs aus 1906 besagt, dass die Bedingung $f \in \mathcal{C}^1(G)$
 überflüssig ist. Siehe Hörmander, th. 2.2.8.

1.1.2 Beispiele Ist $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, so gilt $f|_G \in \mathcal{O}(G)$.
 $\mathcal{O}(G)$ ist eine $\mathbb{C}$ -Algebra. Ist $f, g \in \mathcal{O}(G)$ und
 $g(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, so ist $f/g \in \mathcal{O}(G)$.

Für ein Polyzylinder $P_r(a)$ heißt die Menge

$$\partial_0 P_r(a) = \{z \in \mathbb{C}^n: |z_j - a_j| = r_j, 1 \leq j \leq n\}$$

die Bestimmungsfläche von $P_r(a)$. Für $n > 1$
 gilt $\partial_0 P_r(a) \subsetneq \partial P_r(a)$.

(3)

$\partial_o P_r(a) = \partial B_{r_1}(a_1) \times \dots \times \partial B_{r_n}(a_n) \cong S_1 \times \dots \times S_1$
 ist ein Torus. Sei $S_j = a_j + r_j e^{i\theta_j}$ eine Parametrisierung
 des Kreises $\partial B_{r_j}(a_j)$. Wir betrachten das Lebesgue
 Maß dS_j auf $\partial B_{r_j}(a_j)$ und notieren mit $dS_1 \dots dS_n$
 das Produktmaß auf $\partial_o P_r(a)$. Für eine Funktion
 $g \in \mathcal{C}^0(\partial_o P_r(a))$ gilt

$$\int_{\partial_o P_r(a)} g(S) dS_1 \dots dS_n = i^n r_1 \dots r_n \int_{[0, 2\pi]^n} g(S(\theta)) e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_n)} d\theta_1 \dots d\theta_n$$

1.1.3 Satz (Cauchy-Formel) Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ und
 $\overline{P_r(a)} \subset G$. Dann gilt für alle $z \in P_r(a)$

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_o P_r(a)} \frac{f(S) dS_1 \dots dS_n}{(S_1 - z_1) \dots (S_n - z_n)}.$$

Beweis Induktion über n . Für $n=1$ dies ist die
 übliche Cauchy-Formel aus der Funktionentheorie.
 $n-1 \rightsquigarrow n$: Sei $z = (z_1, \dots, z_n) \in P_r(a)$ fest.

Die Funktion $S_n \mapsto f(z_1, \dots, z_{n-1}, S_n)$ ist holomorph
 in einer Umgebung von $\overline{B_{r_n}(a_n)}$. Cauchy-Formel
 in einer Variabel ergibt

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tilde{S}_n - a_n| = r_n} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, S_n)}{S_n - z_n} dS_n$$

Für S_n fest, ist $(S_1, \dots, S_{n-1}) \mapsto f(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n)$
 holomorph in einer Umgeb von $P_{r_1}(a') \subset \mathbb{C}^{n-1}$, wobei

(4)

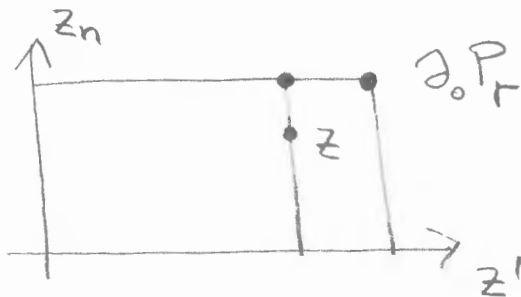
$a' = (a_1, \dots, a_{n-1})$, $r' = (r_1, \dots, r_{n-1})$. Induktionsannahme:

$$f(z', s_n) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{\partial_0 P_{r'}(a')} \frac{f(s', s_n) ds_1 \dots ds_{n-1}}{(s_1 - z_1) \dots (s_{n-1} - z_{n-1})}$$

also

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial B_{r_n}(a_n)} \left(\int_{\partial_0 P_{r'}(a')} \frac{f(s', s_n) ds_1 \dots ds_{n-1}}{(s_1 - z_1) \dots (s_{n-1} - z_{n-1})} \right) ds_n$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 P_r(a)} \frac{f(s) ds_1 \dots ds_n}{(s_1 - z_1) \dots (s_n - z_n)}.$$



1.1.4 Korollar Ist $f \in \mathcal{O}(G)$, so gilt $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$.

Beweis: Cauchy-Formel auf $P_r(a) \Subset G$ und Differentiation unter Integralzeichen. $\square$

Sei J eine abzählbare Menge, $(a_j)_{j \in J}$ eine Familie aus $\mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{j \in J} a_j$ heißt (absolut) konvergent:

$$:\Leftrightarrow \sum_{j \in J} |a_j| := \sup \left\{ \sum_{j \in F} |a_j| : F \subset J \text{ endlich} \right\} < \infty$$

$$\Leftrightarrow a: J \rightarrow \mathbb{C}, j \mapsto a_j, \text{ ist in } L^1(J, \mu), \mu \text{ Zählmaß}$$

Für jede Bijektion $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow J$, konvergiert $\sum_k a_{\sigma(k)}$ gegen einer Summe $S \in \mathbb{C}$ unabhängig von σ .

(5)

S ist genannt die Summe von $(a_j)_{j \in J}$ und wir schreiben
 $S = \sum_{j \in J} a_j$.

Eine Potenzreihe in n Variablen $z_1, \dots, z_n$ um $a \in \mathbb{C}^n$ ist eine Reihe

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha z^\alpha = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (z_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (z_n - a_n)^{\alpha_n}$$

1.1.5 Satz Sei $f \in \mathcal{O}(P_r(a))$. Dann ist f als Potenzreihe in $P_r(a)$ darstellbar und zwar als ihre Taylorreihe:

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} (z-a)^\alpha, \quad z \in P_r(a).$$

Notationen: Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ setze $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$,
 $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, $\alpha + m = (\alpha_1 + m, \dots, \alpha_n + m)$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis Cauchy-Formel auf $z \in P_\rho(a) \subset P_r(a)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 P_\rho(a)} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 P_\rho(a)} f(\zeta) \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{(z-a)^\alpha}{(\zeta-a)^{\alpha+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \left[\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 P_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{\alpha+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n \right] (z-a)^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha (z-a)^\alpha \end{aligned}$$

da die Reihe $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{(z-a)^\alpha}{(\zeta-a)^{\alpha+1}} = \frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)}$ gleichmäßig konvergent ist für $\zeta \in \partial_0 P_\rho(a)$. $\square$

(6)

Wie in einer Variabel konvergiert die Reihe $\sum c_\alpha (z-a)^\alpha$ gleichmäßig auf kompakte Teilmengen von $P_r(a)$ und wir können die Reihe gliedweise ableiten:

$$\partial^\beta \left(\sum c_\alpha (z-a)^\alpha \right) = \sum c_\alpha \partial^\beta (z-a)^\alpha = c_\beta \cdot \beta!$$

da $\partial^\beta z^\alpha = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} z^{\alpha-\beta}$ falls $\beta \leq \alpha$ (d.h. $\beta_j \leq \alpha_j, 1 \leq j \leq n$) und 0 sonst. (Variante: Cauchy-Formel ableiten) $\square$

1.1.6 Satz Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$. Äquivalent:

(1) $f \equiv 0$ auf G (2) $\exists U \subset G$ offen, $f|_U \equiv 0$

(3) $\exists a \in G \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \partial^\alpha f(a) = 0$

Beweis (3) $\Rightarrow$ (1). Sei $D = \{z \in G : \partial^\alpha f(z) = 0 \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$

Dann ist $D \neq \emptyset$, weil $a \in D$. Außerdem ist D abgeschlossen, wegen der Stetigkeit von $\partial^\alpha f$.

Satz 1.1.5 $\leadsto D$ offen. Also ist $D = G$. $\square$

Bemerkung Für $n=1$ gibt es eine 4. äquiv. Bedingung, dass $N(f) = \{f=0\}$ hat ein Häufungspunkt in G . Für $n>1$ dies ist nicht äquiv zu (1). Bsp $f(z_1, z_2) = z_1$. Dann ist $N(f) = z_1$ -Achse.

1.1.7 Offenheitssatz Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht-konstant. Dann ist $f(G) \subset \mathbb{C}$ offen.

Beweis. Sei $a \in G$, $r > 0$ mit $B_r(a) \subset G$. Wir zeigen, dass $f(B_r(a))$ Umgebung von $f(a)$ ist. Sei $p \in B_r(a) \setminus \{a\}$, $f(p) \neq f(a)$ (f nicht-konst auf $B_r(a)$). Die Funktion $f_p: D \rightarrow \mathbb{C}$ ($D \subset \mathbb{C}$ Einheitskreis), $f_p(\lambda) = f(a + \lambda p)$ ist holomorph und nicht konstant. Offenheitssatz in einer Variablen $\leadsto f_p(D) \subset f_p(G)$ enthält eine Umgb von $f_p(0) = f(a)$. $\square$

(7)

1.1.8 Maximum-Prinzip. Sei G ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$.

Hat $|f|$ ein lokales Maximum in $a \in G$, so ist f konstant.

Beweis Sei $r > 0$ so dass $|f|$ ein Maximum auf $B_r(a)$ in a hat. Wäre f nicht-konstant, so wäre $f(B_r(a))$ offen. Sei $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(a)) \subset f(B_r(a))$. Dann $\exists z \in B_\varepsilon(f(a))$ mit $|z| > |f(a)|$ und $\exists b \in B_r(a)$ mit $f(b) = z \Rightarrow |f(b)| > |f(a)| \quad \downarrow \quad \blacksquare$

Wir interpretieren nun die CR Gleichungen mit Hilfe des Differentials. Sei $f \in \mathcal{C}^1(G)$, $a \in G$. Dann ist $df(a) \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^2) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$,

$$df(a) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) dy_j \right)$$

Die Differentiale dx_j, dy_j sind nicht $\mathbb{C}$ -linear und in der komplexen Analysis ist es zweckmäßig mit $\mathbb{C}$ -lineare Differentiale zu arbeiten. Betrachte

$$dz_j = dx_j + \sqrt{-1} dy_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad dz_j(z) = z_j \quad (\mathbb{C}\text{-linear})$$

$$d\bar{z}_j = dx_j - \sqrt{-1} dy_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad d\bar{z}_j(z) = \bar{z}_j \quad (\mathbb{C}\text{-antilinear})$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} df(a) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) dz_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a) d\bar{z}_j \\ &=: \partial f(a) + \bar{\partial} f(a) \end{aligned}$$

Dann gilt $\partial f(a) \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$, $\bar{\partial} f(a) \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \bar{\mathbb{C}})$

1.1.9 Satz Sei $f \in \mathcal{C}^1(G)$, $a \in G$. Dann sind äquivalent:

(i) f erfüllt die CR Gl in a (ii) $\bar{\partial} f(a) = 0$

(iii) $df(a)$ ist $\mathbb{C}$ -linear.

Also $f \in \mathcal{O}(G) \Leftrightarrow f \in \mathcal{C}^1(G)$ und $df(a)$ $\mathbb{C}$ -linear für alle $a \in G$.

(8)

1.1.10 Def Sei $G \subset \mathbb{C}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{C}^m)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$

f holomorph $\Leftrightarrow f_j$ holomorph, $1 \leq j \leq m$.

Seien $G, G' \subset \mathbb{C}^n$, $f: G \rightarrow G'$ heißt biholomorph $\Leftrightarrow f$ bijektiv und f, f^{-1} sind holomorph

Es gilt $df_j = d(\text{pr}_j \circ f) = \text{pr}_j \circ df$, wobei $\text{pr}_j: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$
 $\text{pr}_j(w) = w_j$. Also f holomorph $\Leftrightarrow df(a): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ ist
 $\mathbb{C}$ -linear für alle $a \in G$. Daraus folgt, dass die
 Zusammensetzung holomorpher Abbildungen holom ist.

1.2. Inhomogene Cauchy-Riemannsche Gleichungen

Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine Differentialform von Grad r auf
 U hat die Form $\alpha = \sum \alpha_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} = \sum_{|I|=r} \alpha_I dx_I$

Falls $\mathbb{R}^N = \mathbb{C}^{2n}$ können wir dx_j, dy_j mit Hilfe
 von $dz_j, d\bar{z}_j$ darstellen

$$dx_j = \frac{1}{2} (dz_j + d\bar{z}_j), \quad dy_j = \frac{1}{2i} (dz_j - d\bar{z}_j).$$

Wir können also jede Form auf $\mathbb{C}^n$ als Kombination
 der Formen dz_j und $d\bar{z}_j$, $1 \leq j \leq n$.

1.2.1 Definition Eine Form α auf $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt von
 Bigrad (p, q) falls sie von Grad p in dz_j und Grad q
 in $d\bar{z}_j$ ist.

Beispiel: $\partial f = \sum \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$ ist vom Bigrad $(1, 0)$,

$\bar{\partial} f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$ vom Bigrad $(0, 1)$. Allgemein

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \alpha_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \\ &= \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \alpha_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \end{aligned}$$

(9)

Schreibe $d\alpha = \sum d\alpha_{IJ} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = \sum \partial\alpha_{IJ} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J +$

$+ \sum \bar{\partial}\alpha_{IJ} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J =: \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$

$\partial\alpha$ hat Bigrad $(r+1, s)$, $\bar{\partial}\alpha$ $(r, s+1)$.

Es gilt $0 = d^2\alpha = (\partial + \bar{\partial})(\partial + \bar{\partial})\alpha = \underbrace{\partial^2\alpha}_{(r+2, s)} + \underbrace{(\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\alpha}_{(r+1, s+1)} + \underbrace{\bar{\partial}^2\alpha}_{(r, s+2)}$

$\leadsto \partial^2\alpha = 0, (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\alpha = 0, \bar{\partial}^2\alpha = 0.$

Eine holomorphe Funktion f erfüllt die Gleichung $\bar{\partial}f = 0$. Um holom. Fktn mit bestimmten Eigensch. zu konstruieren ist es zweckmäßig die inhomog. CR Gleichungen zu betrachten:

(*) $\bar{\partial}f = \alpha$ wobei $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j d\bar{z}_j \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \alpha_j, 1 \leq j \leq n.$

Gilt $\bar{\partial}f = \alpha$, so ist $\bar{\partial}\alpha = \bar{\partial}^2f = 0$. Dies sind die Kompatibilitätsbedingungen für (*).

1.2.2 Satz (Serre) Sei $n > 1$ und α eine $(0,1)$ -Form mit kompaktem Träger und $\bar{\partial}\alpha = 0$. Dann existiert eine glatte Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ mit $\bar{\partial}f = \alpha$.

1.2.3 Satz (Cauchy-Pompeiu Formel)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ mit stückweise glatten Rand, $f \in C^1(\bar{G})$.

Dann gilt für alle $z \in G$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_G \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right]$$

Beweis Sei $\bar{B}_\varepsilon(z) \subset G$, $G_\varepsilon = \bar{G} \setminus B_\varepsilon(z)$. Wende Stokes

Formel $\int_{\partial G_\varepsilon} \omega = \int_{G_\varepsilon} d\omega$ für $\omega = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ an

und lasse $\varepsilon \rightarrow 0$. 

(10)

Proof of 1.2.2 Setze $u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{v_n(z', s)}{s - z_n} d\bar{s} \wedge ds$
 $= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{v_n(z', s + z_n)}{s} d\bar{s} \wedge ds$ also $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$.

$v_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}^n) \rightsquigarrow \exists M > 0 \forall z \text{ mit } \|z'\| > M : v_n(z) = 0$

$\rightsquigarrow u(z) = 0$

Ableiten unter Integralzeichen:

$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{s} \frac{\partial v_n}{\partial \bar{z}_n}(z', s + z_n) d\bar{s} \wedge ds$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_{B(0, R)} \frac{1}{s - z_n} \frac{\partial v_n}{\partial \bar{s}}(z', s) d\bar{s} \wedge ds = v_n(z) - \underbrace{\int_{\partial B(0, R)} \frac{v_n(z', s)}{s - z_n} ds}_{= 0, R \gg 0}$

$\rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_n} = v_n$

Außerdem $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{s - z_n} \underbrace{\frac{\partial v_n}{\partial \bar{z}_j}(z', s)}_{= \frac{\partial v_j}{\partial \bar{s}}(z', s)} d\bar{s} = v_j(z).$

Insgesamt $\bar{\partial}u = v$.

Also $\bar{\partial}u = 0$ auf $\mathbb{C}^n \setminus \text{supp } v$, d.h. $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \setminus \text{supp } v)$

Aber $u = 0$ für $\|z'\| > M$ und $(\mathbb{C}^n \setminus \text{supp } v) \cap \{z : \|z'\| > M\} \neq \emptyset \rightsquigarrow u = 0$ auf die nicht-beschränkte Komponente von $\mathbb{C}^n \setminus \text{supp } v$. Somit hat u kompakten Träger.

Bemerkung: Für $n=1$ finden wir auch $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ mit $\bar{\partial}u = v = v_1 d\bar{z}$. Aber u hat i.A. nicht komp. Träger. Angenommen $\text{supp } u \subset B_R(0)$ so gilt

$0 = \int_{\partial B} u dz = \int_B d(u dz) = \int_B \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = \int_{\mathbb{C}} v_1 z dx dy$

Die Gleichung hat für v mit $\int_{\mathbb{C}} v dz \neq 0$ keine Lösung mit kompakten Träger.

(11)

Um die Lösbarkeit der $\bar{\partial}$ -Gleichung zu studieren führen wir die Dolbeault Kohomologiegruppen an.

1.2.4 Definition Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Unter einem Coketten-Komplex über R versteht man eine Sequenz von R -Modulhomomorphismen

$$(V^\bullet): \quad V^0 \xrightarrow{d^0} V^1 \xrightarrow{d^1} \dots \rightarrow V^k \xrightarrow{d^k} V^{k+1} \rightarrow \dots$$

mit $d^k \circ d^{k-1} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir nennen für $n \in \mathbb{N}_0$

$$Z^k(V^\bullet) := \ker(d^k) \quad k\text{-te Gruppe der Cozyklen}$$

$$B^k(V^\bullet) := \operatorname{Im}(d^{k-1}) \quad k\text{-te Gruppe der Coränder}$$

$$B^0(V^\bullet) := 0$$

Offensichtlich $B^k(V^\bullet) \subset Z^k(V^\bullet)$ und

$$H^k(V^\bullet) := Z^k(V^\bullet) / B^k(V^\bullet)$$

heißt die k -te Kohomologiegruppe des Komplexes $V^\bullet$.

Als Beispiel betrachte das Dolbeault-Komplex für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ (Koketten Komplex von $\mathbb{C}$ -VR)

$$0 \rightarrow \Omega^{p,0}(U) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1}(U) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,n}(U) \rightarrow 0$$

Die Cozyklen heißen $\bar{\partial}$ -geschlossene Formen, die Coränder heißen $\bar{\partial}$ -exakte Formen. Die Kohomologiegruppen

$$H^{p,q}(U) = \frac{\ker(\bar{\partial}: \Omega^{p,q}(U) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(U))}{\operatorname{Im}(\bar{\partial}: \Omega^{p,q-1}(U) \rightarrow \Omega^{p,q}(U))} \quad p, q \geq 0$$

heißen Dolbeault Kohomologiegruppen.

(12)

Für $p=0$ gilt $H^{p,0}(U) = \text{Ker}(\bar{\partial}: \Omega^{p,0}(U) \rightarrow \Omega^{p,1}(U))$

Ist $\alpha \in H^{p,0}(U)$, $\alpha = \sum \alpha_I dz_I$, so ist

$$0 = \bar{\partial}\alpha = \sum_{|I|=p} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_I}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I$$

$$\leadsto \frac{\partial \alpha_I}{\partial \bar{z}_j} = 0, 1 \leq j \leq n \text{ d.h. } \alpha_I \in \mathcal{O}(U).$$

$$\leadsto H^{p,0}(U) = \left\{ \sum_{|I|=p} \alpha_I dz_I : \alpha_I \in \mathcal{O}(U) \right\}$$

Elemente von $H^{p,0}(U)$ heißen holomorphe p -Formen.

Insbesondere $H^{0,0}(U) = \mathcal{O}(U)$.

Als zweites Beispiel betrachte das Dolbeault-Komplex mit kompaktem Träger:

$$0 \rightarrow \Omega_0^{p,0}(U) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega_0^{p,1}(U) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega_0^{p,n}(U) \rightarrow 0$$

$$\text{wobei } \Omega_0^{p,2}(U) = \{ \alpha \in \Omega^{p,2}(U) : \text{supp } \alpha \subseteq U \}$$

Die Kohomologiegruppen

$$H_0^{p,2}(U) = \frac{\text{Ker}(\bar{\partial}: \Omega_0^{p,2}(U) \rightarrow \Omega_0^{p,2+1}(U))}{\text{Im}(\bar{\partial}: \Omega_0^{p,2-1}(U) \rightarrow \Omega_0^{p,2}(U))}, p, 2 \geq 0$$

heißen Dolbeault-Kohomologiegruppen mit kompaktem Träger. Für $p=0$ gilt $H_0^{p,0}(U) = 0$.

Allgemein gilt: $H^k(V^\bullet) = 0 \Leftrightarrow V^\bullet$ exakt an die Stelle $k \Leftrightarrow \forall \alpha \in Z^k(V^\bullet) \exists \beta \in V^{k-1} : d^{k-1}\beta = \alpha$

Kohomologiegruppen messen die Abweichung des Komplexes $V^\bullet$ von der Exaktheit.

Der Satz 1.2.2 von Serre besagt dass $H_0^{0,1}(\mathbb{C}^n) = 0$

für $n > 1$. Solche Sätze heißen Verschwindungssätze und spielen eine wichtige Rolle.

Das dritte Beispiel ist das deRham-Komplex für eine differenzierbare Mfg X von reellen Dimension m

$$0 \rightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \xrightarrow{d} \dots \rightarrow \Omega^m(X) \rightarrow 0$$

mit der de Rham-Kohomologie

$$H^k(X) = \frac{\text{Ker}(d: \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{k+1}(X))}{\text{Im}(d: \Omega^{k-1}(X) \rightarrow \Omega^k(X))}, \quad k = \overline{0, m}$$

Als Anwendung des Satzes 1.2.2 von Serre beweisen wir:

1.2.5 Satz (Hartogs) Sei $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, offen, $K \subset D$ mit $D \setminus K$ zusammenhängend. Dann lässt sich jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus K)$ zu einer holomorphen Funktion $F \in \mathcal{O}(D)$ fortsetzen.

Beweis Sei $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$, $\chi = 1$ in einer Umgebung V von K . Setze

$$f_0: D \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_0 = \begin{cases} (1-\chi)f & \text{on } D \setminus K \\ 0 & \text{on } V \end{cases}$$

Dies ist eine Fortsetzung von $f|_{D \setminus \text{supp } \chi}$ zu D , aber nur eine glatte Fortsetzung. Wir wollen f_0 korrigieren mit einer Funktion u so dass $F = f_0 - u$ holomorph ist. Wir suchen u mit

$$0 = \bar{\partial} F = \bar{\partial} f_0 - \bar{\partial} u \Leftrightarrow \bar{\partial} u = \bar{\partial} f_0 = -f \bar{\partial} \chi + \underbrace{(1-\chi) \bar{\partial} f}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \bar{\partial} u = -f \bar{\partial} \chi$$

Sei $v = -f \bar{\partial} \chi \in \Omega_{0,1}^1(\mathbb{C}^n)$. Offensichtlich $\bar{\partial} v = \bar{\partial}^2 f_0 = 0$ also nach 1.2.2 gibt es $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ mit $\bar{\partial} u = v$. Da $v = 0$ auf $\mathbb{C}^n \setminus \text{supp}(\bar{\partial} \chi)$ gilt

$\bar{\partial} u = 0$ dort, d.h. u ist holomorph auf $\mathbb{C}^n \setminus \text{supp}(\bar{\partial} \chi)$.

(14)

Da $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ folgt, dass $u \equiv 0$ auf die unbeschränkte
 zshg Komponente von $\mathbb{C}^n \setminus \text{supp } \chi$. Da ∂D in dieser
 Komponente enthalten ist, so ist $u = 0$ in der
 Umgebung von ∂D . Es ist dann $F = f_0 - u = f_0 = f$
 in einer offenen Teilmenge von $D \setminus K$ also
 auf ganz $D \setminus K$ (Identitätssatz). $\square$

1.2.6. Lemma von Poincaré Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ ein Sterngebiet,
 $v \in \Omega^r(D)$, $r \geq 1$, $dv = 0$. Dann gibt es $u \in \Omega^{r-1}(D)$
 mit $du = v$

Dies zeigt, dass $H^r(D) = 0$, $r \geq 1$.

1.2.7. Lemma von Dolbeault - Grothendieck

Seien $K_j \subset \mathbb{C}$ kompakt für $j = 1, \dots, n$, U_j offene
 Umgebungen von K_j , $K = K_1 \times \dots \times K_n$, $U = U_1 \times \dots \times U_n$.
 Ist $v \in \Omega^{p,q}(U)$, $q \geq 1$, mit $\bar{\partial}v = 0$ so gibt es
 eine offene Menge U' mit $K \subset U' \subset U$ und
 $u \in \Omega^{p,q-1}(U')$ mit $\bar{\partial}u = v$ auf U' .

Hängt dabei v noch holomorph oder beliebig
 oft differenzierbar von Parametern ab, so hängt
 u auch holomorph oder beliebig oft diffbar
 von diesen Parametern ab.

Beweis Siehe [Hörmander, Th. 2.2.3] oder [Narasimhan,
 Th. 2.13.4]. Man benutzt dabei die Lösung der
 $\bar{\partial}$ -Gleichung $\bar{\partial}u = f$ in $\mathbb{C}$ (Satz 1.2.2 in $\mathbb{C}$, wobei
 die Lösung nicht unbedingt komp. Träger hat.) $\square$

1.2.8 Satz Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist $H^{p,1}(D) = 0$, $p = 0, 1$.

Beweis Wir betrachten den Fall wenn $D = B_R(0)$, $R \in (0, \infty]$

Sei $p = 0$, $v \in \Omega^{0,1}(D)$, $v = f d\bar{z}$. Gesucht ist $u \in \Omega^{0,0}(D) = \mathcal{C}^\infty(D)$ mit $\bar{\partial}u = v$ d.h. $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = f d\bar{z} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$.

Wir können die Lösung nicht direkt als Integral angeben wenn f kein kompakten Träger hat.

Sei $0 < R_0 < R_1 < \dots < R_k \nearrow R$, $k \rightarrow \infty$, $D_k := B_{R_k}(0)$.

Sei $\chi_k \in \mathcal{C}_0^\infty(D_{k+1})$, $\chi_k = 1$ auf D_k . Dann $\chi_k f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$ (fortgesetzt mit 0 außerhalb D_{k+1}). Es gibt dann

$u_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ mit $\bar{\partial}u_k = \chi_k v$ auf $\mathbb{C}$.

Wir konstruieren eine Folge $\tilde{u}_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ mit

$\bar{\partial}\tilde{u}_k = v$ auf D_k und $\|\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k\|_{D_{k-1}} \leq 2^{-k}$ für $k \geq 1$.

Setze $\tilde{u}_1 = u_1$. Sind $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k$ schon konstruiert

dann ist $\bar{\partial}(u_{k+1} - \tilde{u}_k) = \chi_{k+1} v - v = 0$ auf D_k

d.h. $u_{k+1} - \tilde{u}_k$ ist holomorph auf D_k . Es gibt dann

ein Polynom P_k mit $\|u_{k+1} - \tilde{u}_k - P_k\|_{D_{k-1}} \leq 2^{-k}$.

Setze $\tilde{u}_{k+1} = u_{k+1} - P_k$. Dann ist

$\bar{\partial}\tilde{u}_{k+1} = \bar{\partial}u_{k+1} = \chi_{k+1} v = v$ auf D_{k+1} .

Für jedes $z \in D$ gilt $z \in D_k$ für fast alle k also ist die Folge $(\tilde{u}_k(z))$ Cauchy-Folge. Setze $u(z) := \lim \tilde{u}_k(z)$.

Auf D_k gilt $u = \tilde{u}_k + \underbrace{\sum_{j=k}^{\infty} (\tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_j)}_{\text{holom}} = \tilde{u}_k + \underbrace{h}_{\text{holom}}$

$\leadsto u \in \mathcal{C}^\infty(D)$ und

$\bar{\partial}u = \bar{\partial}\tilde{u}_k + \bar{\partial}h = v$ auf D_k

für alle $k \geq 1$ also auf D . $\square$

Ist D beliebig, muss man die Runge Approximationssatz benutzen, siehe [Hörmander, Th. 1.4.4].

1.2.9 Satz Seien $D_j \subset \mathbb{C}$ offen, $D = D_1 \times \dots \times D_n \subset \mathbb{C}^n$.

Dann gilt $H^{p,q}(D) = 0$, $p = 0, \dots, n$, $q = 1, \dots, n$.

Beweis Benutze eine Ausschöpfung $K_{j,j} \nearrow D_j$ von D_j und das Dolbeault-Grothendieck Lemma 1.2.7 um die Gl. $\bar{\partial}u = v$ in der Nähe von $K_{j_1} \times \dots \times K_{j_n}$ zu lösen. Dann benutzt man eine Approximation wie in 1.2.8. Siehe [Nar, Th. 2.13.5].

1.2.10 Beispiel Sei $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Dann ist $H^{0,1}(U) \neq 0$.

Beweis Wir konstruieren $\omega \in \Omega^{0,1}(U)$, $\bar{\partial}\omega = 0$ aber $\omega \notin \text{Im}(\bar{\partial})$. Auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$ gilt mit $r^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$:

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2} + \frac{\bar{z}_1}{z_2 r^2}$$

$$\leadsto \bar{\partial} \left(\frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2} \right) + \bar{\partial} \left(\frac{\bar{z}_1}{z_2 r^2} \right) = 0 \quad \text{Definiere } \omega \in \Omega^{0,1}(U)$$

$$\omega = \begin{cases} \bar{\partial} \left(\frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2} \right), & z_1 \neq 0 \\ -\bar{\partial} \left(\frac{\bar{z}_1}{z_2 r^2} \right), & z_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{offensichtlich } \bar{\partial}\omega = 0.$$

Angenommen es existiert $f \in \Omega^{0,0}(U)$, $\bar{\partial}f = \omega$.

$$\leadsto \bar{\partial}f = \bar{\partial} \left(\frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2} \right) \Leftrightarrow \bar{\partial} \left(f - \frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2} \right) = 0 \quad z_1 \neq 0$$

Sei $u = z_1 f - \bar{z}_2 r^2$ auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\bar{\partial}u = \bar{\partial} \left[z_1 \left(f - \frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2} \right) \right] = 0 \quad \text{auf } \mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 \neq 0\}.$$

Da $\bar{\partial}u$ stetig auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ ist $\Rightarrow \bar{\partial}u = 0$ auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

d.h. $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$. Hartogs $\leadsto \tilde{u} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$ extension

$$\text{Aber } u(0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad \downarrow \quad \square$$

1.2.11. Bemerkung (i) Ist $D \subset \mathbb{C}^n$ Holomorphiegebiet
 $\Rightarrow H^{p,q}(D) = 0$ für $p \geq 0, q \geq 1$.

(ii) $H^{p,q}_0(\mathbb{C}^n) = 0$ für $p \geq 0, q \leq n-1$.

(iii) Serre Dualität: $H^{n-p, n-q}(U) \cong H^{p,q}(U)'$
 für alle $p, q \geq 0, U \subset \mathbb{C}^n$ offen. E' bezeichnet das
 topologische Dual.

1.3. Komplexe Mannigfaltigkeiten. Vektorbündeln

1.3.1. Definition Eine topologische Mannigfaltigkeit
von Dimension m ist ein topologischer Raum X mit
 folgenden Eigenschaften:

- (i) X ist Hausdorffsch,
- (ii) X hat eine abzählbare Basis der Topologie,
- (iii) X ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^m$: $\forall p \in M$
 $\exists U \subset M$ offene Umgebung von p in M , $\exists D \subset \mathbb{R}^m$
 offen und ein Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow D$,
 genannt Karte auf M .

Die Eigenschaft (ii) dient zur Existenz der Zerlegung der
 Eins. Die Dimension ist eine Invariante einer top. Mfg.
 (häng von der Karte nicht ab). Dies folgt aus der
 Satz über Dimensionsinvarianz von Brouwer: Sind
 $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, nicht-leer und homöomorph, so ist $m=n$.

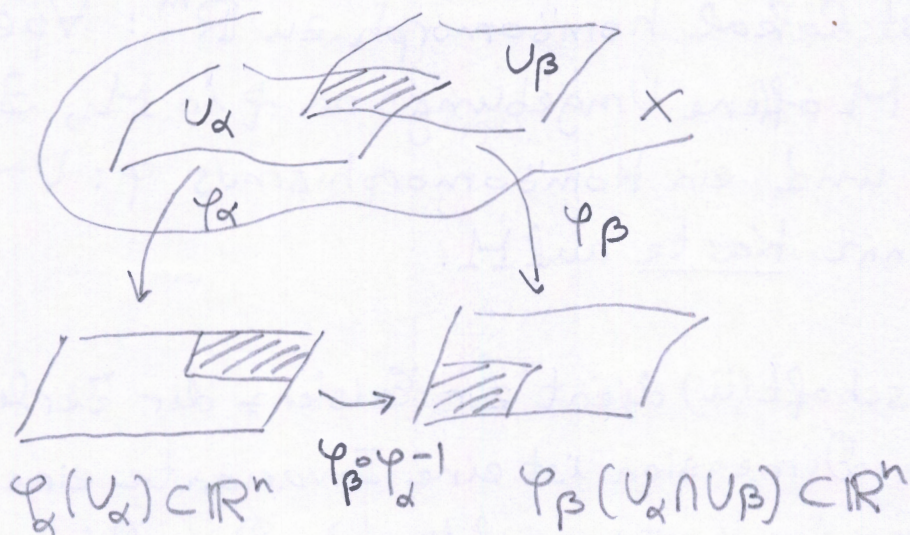
1.3.2 Definition Sei X eine top Mfg.

- (i) Eine Familie von Karten $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ heißt Atlas falls $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
- (ii) Ein Atlas heißt der Klasse $\mathcal{C}^k$, wobei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls für alle $\alpha, \beta \in A$ den Kartenübergang $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ der Klasse $\mathcal{C}^k$ ist.
- (iii) Eine Karte (U, φ) auf X heißt verträglich mit dem Atlas $\mathcal{A}$, falls $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ ist noch ein $\mathcal{C}^k$ -Atlas.
- (iv) Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt maximal falls jede mit $\mathcal{A}$ verträgliche Karte zu $\mathcal{A}$ gehört.

1.3.3 Lemma Sei $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{C}^k$ -Atlas. Dann ist

$\mathcal{A}_{\max} = \{(U, \varphi) \text{ Karte auf } X : (U, \varphi) \text{ verträglich mit } \mathcal{A}\}$
ein maximaler $\mathcal{C}^k$ -Atlas mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\max}$.

Beweis Kettenregel. $\square$



1.3.4 Definition Eine differenzierbare Struktur der Klasse $\mathcal{C}^k$ auf eine top Mfg X ist ein maximaler Atlas der Klasse $\mathcal{C}^k$. Eine differenzierbare Mfg der Klasse $\mathcal{C}^k$ ist ein Paar $(X, \mathcal{A})$, wobei X eine top Mfg ist und $\mathcal{A}$ eine diffbare Struktur der Klasse $\mathcal{C}^k$ ist.

1.3.5 Definition Seien X, Y glatte Mfg. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt glatt (C^∞) falls für alle Karten (U, φ) auf X , (V, ψ) auf Y ist:
 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ (Kartendarstellung) glatt.

1.3.6 Definition Sei X eine top Mfg von Dim $m = 2n$. Ein Atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ heißt holomorph falls für alle $\alpha, \beta \in A$ ist $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ holomorph, wobei $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ als offenen Teilmengen von $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ gefasst sind.

Ein maximaler holomorpher Atlas heißt komplexe Struktur. Eine komplexe Mfg von Dimension n ist eine top Mfg von reellen Dim $2n$ zusammen mit einer komplexen Struktur. Wir schreiben $\dim X = \dim_{\mathbb{C}} X = n$.

Sind X, Y komplexe Mfg, so heißt eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ holomorph, falls alle Kartendarstellungen von f holomorph sind.

Ein holomorpher Atlas ist auch ein glatter (C^∞) Atlas. Eine komplexe Mfg trägt also eine induzierte glatte Struktur. Die entsprechende glatte Mfg heißt die zugrundeliegende glatte Mfg.

Eine Abbildg $f: X \rightarrow Y$ heißt biholomorph falls f bijektiv ist und f und f^{-1} holomorph sind.

Eine zusammenhängende komplexe Mfg von Dimension Eins heißt Riemannsche Fläche.

1.3.7 Beispiele (a) $\mathbb{C}^n$ mit dem Atlas $\mathcal{A} = \{\text{Id}\}$ ist eine komplexe Mfg mit $\dim \mathbb{C}^n = n$.

(b) Ist X eine komplexe Mfg, so besitzt jede offene Teilmenge $U \subset M$ eine induzierte komplexe Struktur. Ist $\mathcal{A}_X$ die komplexe Struktur auf X so ist $\mathcal{A}_U = \{(V, \varphi) \in \mathcal{A}_X : V \subset U\}$ eine kompl Str auf U .

(c) Sind X, Y komplexe Mfg, so ist auch $X \times Y$. Es gilt $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

(d) Der komplex-projektive Raum

Spielt eine fundamentale Rolle für kompakte Mfg wie $\mathbb{C}^n$ für nicht kompakte Mfg.

Auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ wird folgende Äquivalenzrelation erklärt: $z \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : z = \lambda w$.

Wir bezeichnen mit $[z] := \{\lambda z : \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ die Äquivalenzklasse von z (nichts anderes als die im Nullpunkt gelochte Gerade durch 0 und z).

Die Menge $\mathbb{P}^n := \mathbb{C}\mathbb{P}^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ nennen wir den n -dim komplex-projektiven Raum.

Die Abbildg $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$, $\pi(z) = [z]$ bezeichnen wir als die natürliche (kanonische) Projektion.

π ist surjektiv, wir verstehen also $\mathbb{P}^n$ mit der feinsten Topologie, für die π stetig wird. Eine Menge $U \subset \mathbb{P}^n$ ist also gdw offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ offen ist.

(Übung: Zeige, dass dies eine Topologie ist.)

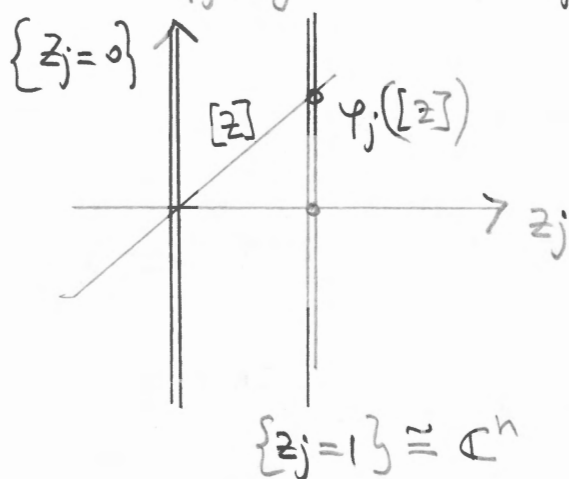
Sei

$$U_j = \{ [z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n : z_j \neq 0 \}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Dann ist U_j offen, $\pi^{-1}(U_j) = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : z_j \neq 0\}$.

Betrachte die Abbildung

$$\varphi_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \varphi_j([z]) = \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right)$$



φ_j ist stetig:

$$\pi^{-1}(U_j) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_j} \mathbb{C}^n$$

$$\pi \searrow U_j \nearrow \varphi_j$$

wobei $\tilde{\varphi}_j$ stetig ist. Also

$$\varphi_j \circ \pi = \tilde{\varphi}_j \leadsto \pi^{-1}(\varphi_j^{-1}(V)) = \tilde{\varphi}_j^{-1}(V)$$

für $V \subset \mathbb{C}^n$ offen $\leadsto \varphi_j$ stetig.

φ_j ist bijektiv: $\varphi_j^{-1}: \mathbb{C}^n \rightarrow U_j$, $\varphi_j^{-1}(w) = (w_1, \dots, w_{j-1}, 1, w_{j+1}, \dots)$

ist auch stetig also ist φ_j ein Homöomorphismus.

Die Familie $\{(U_j, \varphi_j) : j=0, \dots, n\}$ bildet einen holomorphen Atlas auf $\mathbb{P}^n$. Die Koordinatentransformationen

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \mathbb{C}^n \setminus \{z_j \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{z_i \neq 0\}$$

$$(w_1, \dots, w_n) \mapsto \left(\frac{w_1}{w_j}, \dots, \frac{w_{j-1}}{w_j}, \frac{w_{j+1}}{w_j}, \dots, \underbrace{\frac{1}{w_j}}_{i\text{-te Stelle}}, \dots, \frac{w_n}{w_j} \right)$$

sind holomorph.

i -te Stelle

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{P}^n$ Hausdorffsch ist. Seien $[z], [w] \in \mathbb{P}^n$, $[z] \neq [w]$. Gilt $[z], [w] \in U_i$ für ein i so findet man trivialerweise disjunkte Umgeb., da $U_i \cong \mathbb{C}^n$. Sonst gilt $z_j w_j = 0$ für alle $j = 0, \dots, n$. O.B.d.A.

$z = (1, z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$, $w = (0, \dots, 0, w_{k+1}, \dots, w_n)$ mit $z_j = 0$, $j = 1, \dots, k$. Sei $V = \pi(\{(1, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |v_n| < 1\})$, $W = \pi(\{(v_1, \dots, v_n, 1) \in \mathbb{C}^{n+1} : |v_1| < 1\})$

Dann ist V offene Umgebung von $[z]$, W offene Umgb von $[w]$ und $V \cap W = \emptyset$.

Wir haben also bewiesen:

- $\mathbb{P}^n$ ist eine n -dim komplexe Mfg

Außerdem gilt:

- Die kanonische Projektion $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ ist holomorph.

- $\mathbb{P}^n$ ist kompakt

Γ Für $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ gilt $z/\|z\| \in S^{2n+1}$ also ist $\pi: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n$ surjektiv und stetig. Da S^{2n+1} komp ist und $\mathbb{P}^n$ Hausdorffsch, folgt dass $\mathbb{P}^n$ kompakt ist.

- $\mathbb{P}^1$ ist biholomorph zum Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$.

Die Abbildg $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1$, $f(z) = [1, z]$, $z \in \mathbb{C}$ und $f(\infty) = [0, 1]$ ist biholomorph.