1. Blatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen

Abgabe: 24–26.10.2017 siehe Hinweis

Hinweis: Achtung, Abgabemodus der Übungen geändert!
Studierende mit der Gruppennummer **3** legen ihre Lösungen zu Blatt 1 bitte bis Mittwoch, den 25.10.17, um 10:00 Uhr in den entsprechenden Kasten des Studierendenarbeitsraums (Raum 301) im Mathematischen Institut.
Studierende mit der Gruppennummer **1, 2, 4 und 5** geben ihre Lösungen zu Blatt 1 bitte im Zeitraum 24.-26.10.17 in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.
Abgaben der Gruppe 3, die nicht bis zur genannten Frist in den Kasten gelegt werden, bzw. Abgaben der Gruppen 1, 2, 4 und 5, die in den Kasten gelegt werden, können aus organisatorischen Gründen leider nicht korrigiert und daher auch nicht mit Punkten versehen werden. Wir bitten um Ihr Verständnis.

1. Aufgabe (4 Punkte)

Beweise durch Nachrechnen, dass die gegebenen Funktion die jeweiligen Differentialgleichungen lösen.

(a) $y' + \dfrac{x+y-1}{x} = 0, \quad y(x) = \dfrac{C}{x} - \dfrac{x}{2} + 1, \quad C \in \mathbb{R}$

(b) $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y - x^3 = 0, \quad y(x) = Cx\sqrt{1-x^2} + x, \quad C \in \mathbb{R}$

(c) $y' = \dfrac{2y}{x} + 2x^3 e^{x^2}, \quad y(x) = x^2(e^{x^2} + C), \quad C \in \mathbb{R}$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Ein zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Punkt $(0, h) \in \mathbb{R}^2$, $h \geq 0$, aus mit der Geschwindigkeit v unter dem Steigungswinkel φ geworfener (punktförmiger) Gegenstand der Masse $M > 0$ beschreibt unter dem Einfluß der Erdbeschleunigung ($g \approx 9.81 m/s^2$) eine Bahn $(x(t), y(t))$, welche durch die Gleichung

$$M \frac{d^2}{dt^2}(x(t), y(t)) = (0, -Mg)$$

beschrieben wird.

(a) Finde $x(t)$ und $y(t)$.

(b) Berechne die Wurfweite $w(\varphi, v, h)$.
(Anleitung: Die Flugzeit t_0 bis zum Aufschlag berechnet sich aus $y(t_0) = 0$.)

Für festes $v > 0$ und $h \geq 0$ sei $\varphi_{\text{op}}(v, h)$ der Winkel, bei dem die Wurfweite maximal wird.

(c) Zeige $\varphi_{\text{op}}(v, 0) = \frac{\pi}{4}$.

(d) Zeige, dass $\varphi_{\text{op}}(v, h) \neq \frac{\pi}{4}$ für $h > 0$ gilt.

Bitte wenden.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Man berechne eine Lösung der Differentialgleichung

$$f''(x) + 2xf'(x) + 2f(x) = 0,$$

indem man den Reihenansatz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \text{ mit } a_k \in \mathbb{R}$$

wählt und durch Koeffizientenvergleich die Konstanten berechnen. Zeige anschließend, dass die entstehende Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und somit eine Lösung darstellt.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Bestimme eine (glatte) Abbildung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x'''(t) + x''(t) - 2x(t) = 0 \tag{1}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.
(Hinweis: Suche zunächst alle Lösungen von (1) der Form $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Versuche dann mit Linearkombinationen solcher Lösungen eine (reelle) Lösung des Anfangswertproblems zu finden.)