2. Blatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen
Abgabe: 2.11.2017 am Ende der Vorlesung.

Hinweis: Wegen Feiertagen finden die Übungen am Dienstag, den 31.10.17, und Mittwoch, den 1.11.17, nicht statt. Alle Studierenden geben ihre Lösungen zu Blatt 2 bitte am Donnerstag, den 02.11.17, am Ende der Vorlesung ab. Bitte schreiben Sie neben Namen und Matrikelnummer auch Ihre Gruppennummer auf Ihre Lösungen.

1. Aufgabe (3 Punkte)
Man betrachte die Vektorfelder $f_j \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= (a,b) \text{ mit } a,b \in \mathbb{R}, \\ f_2(x,y) &= (x,y), \\ f_3(x,y) &= (x,2y). \end{aligned}$$

Finde für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Integralkurve von f_j, $1 \leq j \leq 3$, mit $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

2. Aufgabe (9 Punkte)
Ein Objekt der Masse $m > 0$ wird vom Nullpunkt aus mit der Geschwindigkeit $v_0 > 0$ unter Einfluss der Gravitation und des Luftwiderstandes senkrecht nach oben geworfen. Die Bewegung beschreiben wir durch das Anfangswertproblem

$$m\ddot{y}(t) = -mg - \eta f(\dot{y}(t)), \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = v_0. \tag{1}$$

wobei $g > 0$ die Erdbeschleunigung, $\eta > 0$ ein Koeffizient für die Reibung im Medium Luft und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Abhängigkeit der Reibung von der Geschwindigkeit beschreibt ($\dot{y}$ und $\ddot{y}$ steht für die erste bzw. zweite Ableitung nach der Zeit t). Es sei

$$(i) \quad f_1(v) = v, \qquad (ii) \quad f_2(v) = \operatorname{sgn}(v), \qquad (iii) \quad f_3 = v|v|.$$

(a) Gebe für jedes $j \in \{1,2,3\}$ eine Lösung $y_j \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems (1) mit $f = f_j$ an.
(Hinweis zu (ii): Man betrachte nur den Fall $g \geq \frac{\eta}{m}$ und bestimme eine stetig differenzierbare Funktion $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = v_0$, welche die Differentialgleichung bis auf einen Punkt $t_0 \in (0,\infty)$ erfüllt.)

(b) Bestimme $v_{j,\infty} := \lim_{t\to\infty} \dot{y}_j(t)$ für $j = 1,2,3$.

Bitte wenden.

(c) Es sei $h_j = \sup_{t\in[0,\infty)}\{y_j(t)\}$. Zeige

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{mg}{\eta v_0} - \frac{m^2g^2}{\eta^2 v_0^2}\ln(1+\frac{\eta v_0}{mg})\right),\\
h_2 &= \frac{v_0^2}{2(g+\frac{\eta}{m})},\\
h_3 &= -\frac{m}{\eta}\ln\cos\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{\eta v_0^2}{mg}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Zeige, dass die Gleichung

$$x'(t) = \frac{t(x(t)-1)^3}{x(t)-2}$$

eine Lösung $x : (2,\sqrt{5}) \to \mathbb{R}$ hat mit $\lim_{t\to 2} x(t) = 2$ und $\lim_{t\to\sqrt{5}} x(t) = \infty$.