WS 17/18 Marinescu / Herrmann

3. Blatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen

Abgabe: 07.-09.11.2017 siehe Hinweis

Hinweis: Studierende mit der Gruppennummer **3** legen ihre Lösungen zu Blatt 3 bitte bis Mittwoch, den 08.11.17, um 10:00 Uhr in den entsprechenden Kasten des Studierendenarbeitsraums (Raum 301) im Mathematischen Institut.
Studierende mit der Gruppennummer **1, 2, 4 oder 5** geben ihre Lösungen zu Blatt 3 bitte im Zeitraum 07.-09.10.17 in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.
Abgaben der Gruppe 3, die nicht bis zur genannten Frist in den Kasten gelegt werden, bzw. Abgaben der Gruppen 1, 2, 4 und 5, die in den Kasten gelegt werden, können aus organisatorischen Gründen leider nicht korrigiert und daher auch nicht mit Punkten versehen werden. Wir bitten um Ihr Verständnis.

1. Aufgabe (6 Punkte)

Finde möglichst alle Lösungen der folgenden linearen inhomogenen Differentialgleichungen erster Ordnung in x. Löse dazu zuerst die entsprechenden homogenen Differentialgleichungen und variiere anschließend die Konstanten. Sezte danach das Ergebnis in die Differentialgleichung ein, um die Rechnung zu überprüfen.

(a) $y'(x) + x^5 y(x) = x^{11}$,

(b) $y'(x) = \lambda y(x) + \dfrac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\cos^2(x) y'(x) = y(x) + \cos(\tan(x)), \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Finde für jede der folgenden DGLs eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ um (t_0, x_0) und Funktionen $g, h \colon U \to \mathbb{R}$, $h(t,x) \neq 0$ auf U, um zu zeigen, dass die DGL eine exakte DGL der Form $x'(t) = -\frac{g(x(t),t)}{h(x(t),t)}$ ist. Gebe außerdem je eine Lösung des Anfangswertproblems mit $x(t_0) = x_0$ an.

(a) $x'(t) = \frac{4tx+6t^2+2t}{2x-2t^2}$, $(t_0, x_0) = (2, 1)$.

(b) $x'(t) = \frac{\sin(x+t) - t\cos(x+t)}{t\cos(x+t)}$, $(t_0, x_0) = (\frac{\pi}{4}, 0)$.

3. Aufgabe (2 Punkte)

Finde eine stetig differenzierbare Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$ und

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sin(x) f(x)(1 + \cos(x)(f(x))^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Berechne $f(\frac{\pi}{2})$. (Zur Kontrolle: $f(\pi) = \frac{e}{\sqrt{3}}$.)

Bitte wenden.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Seien $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$ und bezeichne (x_0, y_0) die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ \alpha x + \beta y + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Zeige: y ist eine Lösung von

$$y'(x) = f\left(\frac{ax + by(x) + c}{\alpha x + \beta y(x) + \gamma}\right)$$

genau dann, wenn $u(t) = t^{-1}(y(t + x_0) - y_0)$ mit $t = x - x_0$ eine Lösung von

$$u'(t) = \frac{f\left(\frac{a + bu(t)}{\alpha + \beta u(t)}\right) - u(t)}{t}$$

ist.