4. Blatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen
Abgabe: 14.-16.11.2017 siehe Hinweis.

Hinweis: Studierende mit der Gruppennummer **3** legen ihre Lösungen zu Blatt 4 bitte bis Mittwoch, den 15.11.17, um 10:00 Uhr in den entsprechenden Kasten des Studierendenarbeitsraums (Raum 301) im Mathematischen Institut.
Studierende mit der Gruppennummer **1, 2, 4 oder 5** geben ihre Lösungen zu Blatt 4 bitte im Zeitraum 14.-16.11.17 in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.
Abgaben der Gruppe 3, die nicht bis zur genannten Frist in den Kasten gelegt werden, bzw. Abgaben der Gruppen 1, 2, 4 und 5, die in den Kasten gelegt werden, können aus organisatorischen Gründen leider nicht korrigiert und daher auch nicht mit Punkten versehen werden. Wir bitten um Ihr Verständnis.

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeige, dass für jedes $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ das Anfangswertproblem $x'(t) = |x(t)|$, $x(t_0) = x_0$, eine eindeutige Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

(b) Bestimme alle $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$, für die das Anfangswertproblem

$$x'(t) = 16t^3|x(t) - 1|^{3/4},\ x(t_0) = x_0,$$

lokal nicht eindeutig lösbar ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Finde ein Intervall, wo die folgenden Anfangswertprobleme eine Lösung besitzen und berechne die ersten drei Picard-Iterationen:

(a) $\begin{cases} x'(t) = 3t^2 + x^3(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x^2(t) + t \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

3. Aufgabe (4 Punkte)
Man betrachte die Menge $Q = \mathbb{R} \times [-b, b] \subset \mathbb{R}^2$. Es seien $F, f : Q \to \mathbb{R}$ stetig und Lipschitz-stetig in der zweiten Variable mit $|f(t, x)| \leq 1$ für alle $(t, x) \in Q$.

(a) Zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jedes $0 \leq \epsilon \leq 1$ das AWP $x'(t) = F(x(t), t) + \varepsilon f(x(t), t)$, $x(0) = 0$, eine Lösung $x_\varepsilon\colon [-\delta, \delta] \to [-b, b]$ hat.

Bitte wenden.

(b) Zeige $x_\epsilon \to x_0$ gleichmäßig auf $[-\delta, \delta]$ für $\varepsilon \to 0$.
(Hinweis: Betrachte $z(t) := x_\epsilon(t) - x_0(t)$ und wende das Lemma von Gronwall auf $|z(t)|$ an. Benutze die daraus resultierende Abschätzung, um die Behauptung zu beweisen)

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \sin\left(|x|^\alpha\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeige:

(a) f_α ist stetig $\Leftrightarrow \alpha > 0$,

(b) f_α ist lokal Lipschitz-stetig $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

(c) Für welche α ist f_α Lipschitz-stetig?