WS 17/18 Marinescu / Herrmann

5. Blatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen
Abgabe: 21.-23.11.2017 siehe Hinweis.

Hinweis: Studierende mit der Gruppennummer **3** legen ihre Lösungen zu Blatt 5 bitte bis Mittwoch, den 22.11.17, um 10:00 Uhr in den entsprechenden Kasten des Studierendenarbeitsraums (Raum 301) im Mathematischen Institut.
Studierende mit der Gruppennummer **1, 2, 4 oder 5** geben ihre Lösungen zu Blatt 5 bitte im Zeitraum 21.-23.11.17 in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.
Abgaben der Gruppe 3, die nicht bis zur genannten Frist in den Kasten gelegt werden, bzw. Abgaben der Gruppen 1, 2, 4 und 5, die in den Kasten gelegt werden, können aus organisatorischen Gründen leider nicht korrigiert und daher auch nicht mit Punkten versehen werden. Wir bitten um Ihr Verständnis.

1. Aufgabe (4 Punkte)
Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y|(1-y)}, \quad y \leq 1$$

In jedem Fall fertige man eine Skizze an und bestimme die Menge aller Punkte (ξ, η), für welche das Anfangswertproblem nicht lokal eindeutig lösbar ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$, $y \in \mathbb{R}$

(b) $y' = 3(\mathrm{sgn} y)|y|^{\frac{2}{3}}$, $y \in \mathbb{R}$

In jedem Fall fertige man eine Skizze an und bestimme die Menge aller Punkte (ξ, η), für welche das Anfangswertproblem nicht lokal eindeutig lösbar ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Betrachten das AWP (Anfangswertproblem)

$$x'(t) = 2t^3 - x^2(t), \quad x(0) = 0.$$

(a) Zeige, dass das AWP eine eindeutige Lösung $x(t)$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ hat und dort $-1 \leq x(t) \leq 1$ gilt.

(b) Formuliere das Eulersche Polygonzugverfahren für die Zerlegung $t_k = \frac{k}{N}, k = 1, 2, \ldots, N$.

(c) Bestimme N so groß, dass $|x(t_k) - x_k| \leq 10^{-4}$.

Bitte wenden.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei $Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq a,\ |x| \leq b\}$, $F : Q \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf Q. Sei $M, L, D \geq 0$ mit

$$\sup_Q |F| \leq M,\ \sup_Q \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \leq L,\ \sup_Q \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial^2 F}{\partial^2 t}\right| + \left|\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}\right| + \left|\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}\right| \leq D.$$

Es sei $\delta = \min\{a, b/M\}$ und $x : [0,\delta] \to \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung des AWPs $x' = F(t,x)$, $x(0) = 0$. Betrachte die Zerlegung $t_k = \frac{k}{N}\delta$, $k = 0, \ldots, N$ und definiere $x_0, x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ durch

$$x_{k+1} := x_k + \frac{h}{2}(F(t_k, x_k) + F(t_k + h, x_k + hF(t_k, x_k)))$$

für $0 \leq k \leq N-1$ und $x_0 = 0$ mit $h = 1/N$ und N hinreichend groß, sodass die x_ks wohldefiniert sind.

(a) Zeige, dass es ein $C > 0$ gibt, welches nur von M, D, δ abhängt, sodass

$$|x(t_k) - x_k| \leq \frac{Ch^2}{L}(e^{L\delta} - 1)$$

für alle $0 \leq k \leq N$ gilt.

(b) Diese Approximation ist ein zweistufiges Runge-Kutta-Verfahren (Runge-Kutta-Verfahren sind Verallgemeinerungen des Euler-Polygonzugverfahrens). Vergleiche beide Verfahren. Gehe dabei auf evtl. Vor- und Nachteile beider Verfahren ein.