7. Blatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen
Abgabe: 05.-07.12.2017 siehe Hinweis.

Hinweis: Studierende mit der Gruppennummer **3** legen ihre Lösungen zu Blatt 7 bitte bis Mittwoch, den 06.12.17, um 10:00 Uhr in den entsprechenden Kasten des Studierendenarbeitsraums (Raum 301) im Mathematischen Institut.
Studierende mit der Gruppennummer **1, 2, 4 oder 5** geben ihre Lösungen zu Blatt 7 bitte im Zeitraum 05.-07.12.17 in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.
Abgaben der Gruppe 3, die nicht bis zur genannten Frist in den Kasten gelegt werden, bzw. Abgaben der Gruppen 1, 2, 4 und 5, die in den Kasten gelegt werden, können aus organisatorischen Gründen leider nicht korrigiert und daher auch nicht mit Punkten versehen werden. Wir bitten um Ihr Verständnis.

1. Aufgabe (3 Punkte)
Es sei $C > 0$ eine Konstante und $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\|F(x,t)\| \leq C$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Zeige, dass es zu jedem $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des AWP $x'(t) = F(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0$ gibt.

2. Aufgabe (9 Punkte)
Es sei $V \in C^2(\mathbb{R})$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Die (eindimensionale) Bewegung $x(t)$ eines Teilchens der Masse $m > 0$ im Potential V, welches sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort x_0 befindet und dort die Geschwindigkeit v_0 hat, wird durch folgendes AWP beschrieben:

$$m\ddot{x}(t) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x(t)), \qquad x(0) = x_0,\, \dot{x}(0) = v, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Zeige, dass wenn V an der Stelle x_0 ein lokales Minimum oder Maximum hat und $v_0 = 0$ gilt, so ist $x(t) = x_0$ eine Lösung von (1).

Man betrachte das folgende zweidimensionale AWP erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p(t)}{m} \\ -\frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ mv_0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(b) Zeige: Ist $x(t)$ eine Lösung von (1), so ist $t \mapsto (x(t), m\dot{x}(t))$ eine Lösung von (2). Zeige außerdem: Ist $(x(t), p(t))$ eine Lösung von (2), so ist $t \mapsto x(t)$ eine Lösung von (1).

(c) Benutze (b) um zu zeigen, dass (1) lokal stets eine eindeutige Lösung besitzt.

Nun betrachte man die Funktion $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $E(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$.

Bitte wenden.

(d) Es sei $(x(t),(p(t))$ eine Lösung des AWPs (2). Zeige, dass $E(x(t),p(t)) = E(x_0,p_0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

(e) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ mit $\frac{\partial V}{\partial x}(x_0 + r) > 0$ und $V(x) < V(x_0 + r)$ für alle $x \in [x_0, x_0 + r)$. Weiter sei $v_0 = \sqrt{2(V(x_0 + r) - V(x_0))/m}$. Benutze (d), $dx = \frac{p}{m}dt$ und Integration, um zu zeigen, dass es $\delta > 0$ gibt, sodass (1) eine Lösung $x\colon [0,\delta) \to [x_0, x_0{+}r)$ hat mit $\lim_{t\to\delta} x(t) = x_0{+}r$ und $\lim_{t\to\delta} \dot{x}(t) = 0$. Zeige außerdem, dass x fortsetzbar ist.

(f) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial V}{\partial x}(x_0) = 0$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}(x_0) > 0$. Zeige, dass es $\varepsilon > 0$, sodass (1) für jedes $v_0 \in \mathbb{R}$, $|v_0| \leq \varepsilon$, eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt, welche periodisch ist, wenn $v_0 \neq 0$ gilt.

(Bemerkung: E nennt man die Gesamtenergie des Systems. Diese ist die Summe der kinetischen Energie $\frac{1}{2m}p^2$ und der potentiellen Energie $V(x)$. Hierbei bezeichnet p den Impuls des Teilchens. Der Impuls ist das Produkt von Masse und Geschwindigkeit.)

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\widetilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{F}(x) = \sin(\|x\|) \cdot F(x).$$

(a) Zeige, dass $\widetilde{F}$ lokal Lipschitz-stetig ist, und folgere:

Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Integralkurve zu $\widetilde{F}$ mit $\|\varphi(t_0)\| \in \pi\mathbb{Z}$ für ein $t_0 \in I$, so ist φ konstant.

(b) Zeige, dass jede maximale Integralkurve zu $\widetilde{F}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

(*Tipp:* Wo verlaufen die Integralkurven?)