8. Blatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen
Abgabe: 12.-14.12.2017 siehe Hinweis.

Hinweis: Studierende mit der Gruppennummer **3** legen ihre Lösungen zu Blatt 8 bitte bis Mittwoch, den 13.12.17, um 10:00 Uhr in den entsprechenden Kasten des Studierendenarbeitsraums (Raum 301) im Mathematischen Institut.
Studierende mit der Gruppennummer **1, 2, 4 oder 5** geben ihre Lösungen zu Blatt 8 bitte im Zeitraum 12.-14.12.17 in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.
Abgaben der Gruppe 3, die nicht bis zur genannten Frist in den Kasten gelegt werden, bzw. Abgaben der Gruppen 1, 2, 4 und 5, die in den Kasten gelegt werden, können aus organisatorischen Gründen leider nicht korrigiert und daher auch nicht mit Punkten versehen werden. Wir bitten um Ihr Verständnis.

1. Aufgabe (4 Punkte)
Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix des folgenden DGL-Systems, berechnen Sie die Wronski-Determinante und überprüfen Sie die Liouville-Formel anhand dieses Beispiels:

$$x' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{t^2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A(t)} x.$$

2. Aufgabe (2 Punkte)
Wandeln Sie die DGL 4. Ordnung

$$x^{(4)} + \frac{1}{1+t^2}x^{(3)} - \sin(2t)x'' - t^2x' + e^{-2t}x = (1+t^2)\sin(2t)e^{-t}$$

in ein DGL-System 1. Ordnung um.

3. Aufgabe (6 Punkte)
Lösen Sie das inhomogene System

$$y' = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2x} & \dfrac{1}{2x^2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2x} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

indem Sie zuerst zeigen, dass $y_1(x) = (1, x)^T$ das zugehörige homogene System löst. Um eine zweite dazu unabhängige Lösung zu finden machen Sie den Ansatz

Bitte wenden.

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ v(x) \end{pmatrix}$$

und setzen diesen in die homogene Gleichung ein. Dann können Sie die unbekannten Funktionen $u(x), v(x)$ berechnen und eine Fundamentalmatrix angeben. Das inhomogene System lösen Sie dann mit der Variation der Konstanten.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte und die zugehörigen Hauptraumzerlegungen des $\mathbb{C}^n$! Geben sie ferner zu jedem Eigenwert die algebraische un die geometrische Vielfachheit an! Welche der angegebenen Matrizen sind diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$