9. Blatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen
Abgabe: 19.-21.12.2017 siehe Hinweis.

Hinweis: Studierende mit der Gruppennummer **3** legen ihre Lösungen zu Blatt 9 bitte bis Mittwoch, den 20.12.17, um 10:00 Uhr in den entsprechenden Kasten des Studierendenarbeitsraums (Raum 301) im Mathematischen Institut.
Studierende mit der Gruppennummer **1, 2, 4 oder 5** geben ihre Lösungen zu Blatt 9 bitte im Zeitraum 19.-21.12.17 in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.
Abgaben der Gruppe 3, die nicht bis zur genannten Frist in den Kasten gelegt werden, bzw. Abgaben der Gruppen 1, 2, 4 und 5, die in den Kasten gelegt werden, können aus organisatorischen Gründen leider nicht korrigiert und daher auch nicht mit Punkten versehen werden. Wir bitten um Ihr Verständnis.

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $S \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ und $t \in \mathbb{R}$.

(a) Zeige $e^{tSAS^{-1}} = Se^{tA}S^{-1}$.

(b) Zeige $AB = BA \Rightarrow e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ und folgere, dass e^{tA} invertierbar ist.

(c) Finde $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ mit $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Sei nun $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ shiefsymmetrisch, d.h. $A = -A^T$.

(d) Zeige, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung $\varphi_v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\Psi(t) = e^{tA}v$ beschränkt ist. (Tipp: Betrachte die Matrix iA)

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass A diagonalisierbar ist und bestimme die Eigenwerte von A.

(b) Bestimme eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ diagonal wird.

(c) Berechne e^{tA}.

Bitte wenden.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Man bestimme ein (reelles) Fundamentalsystem der DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit

$$\text{(a)}\;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $a \neq b$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass jede Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems $\dot{x}(t) = Ax(t)$ genau dann periodisch ist in $t \in \mathbb{R}$ ist, wenn $\frac{a}{b}$ rational ist.