10. Blatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen

Abgabe: 09.-11.01.2018 siehe Hinweis.

Hinweis: Studierende mit der Gruppennummer **3** legen ihre Lösungen zu Blatt 10 bitte bis Mittwoch, den 10.01.18, um 10:00 Uhr in den entsprechenden Kasten des Studierendenarbeitsraums (Raum 301) im Mathematischen Institut.
Studierende mit der Gruppennummer **1, 2, 4 oder 5** geben ihre Lösungen zu Blatt 10 bitte im Zeitraum 09.-11.01.18 in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.
Abgaben der Gruppe 3, die nicht bis zur genannten Frist in den Kasten gelegt werden, bzw. Abgaben der Gruppen 1, 2, 4 und 5, die in den Kasten gelegt werden, können aus organisatorischen Gründen leider nicht korrigiert und daher auch nicht mit Punkten versehen werden. Wir bitten um Ihr Verständnis.

1. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme alle reellen Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = te^t$

(b) $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = e^{2t}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Berechne die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$x'(t) = Ax(t) + b(t), \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

Das Reduktionsverfahren von d'Alembert:

Sei x eine Lösung des linearen homogenen Differentialgleichungssystems

$$y'(t) = A(t)y(t) \tag{1}$$

mit $x_1(t) \neq 0$. Für eine weitere Lösung macht man den Ansatz

$$y(t) = \phi(t)x(t) + z(t) \quad \text{mit} \quad z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden.

Zeige:

(a) y ist genau dann eine Lösung von (1), wenn z Lösung des Differentialgleichungssystem

$$z_i'(t) = \sum_{j=2}^{n} \left(a_{ij}(t) - \frac{x_i(t)}{x_1(t)} a_{1j}(t) \right) z_j(t), \quad i = 2, \ldots, n \tag{2}$$

ist.

(b) Ist $z^1, \ldots, z^{n-1}$ ein Fundamentalsystem von (2), dann ist

$$x,\ y^1 := \phi^1 x + z^1, \ldots,\ y^{n-1} := \phi^{n-1} x + z^{n-1} \text{ mit } \phi^k \text{ Lösung von } (\phi^k)' x_1 = \sum_{j=2}^{n} a_{1j} z_j^k$$

ein Fundamentalsystem von (1).

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x' &= (3t-1)x - (1-t)y + te^{t^2} \\ y' &= -(t+2)x + (t-2)y - e^{t^2}. \end{aligned}$$

Tipp: Das homogene System hat eine Lösung der Form $(x(t), y(t)) = (\phi(t), -\phi(t))$.