11. Blatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen
Abgabe: 16.-18.01.2018 siehe Hinweis.

Hinweis: Studierende mit der Gruppennummer **3** legen ihre Lösungen zu Blatt 11 bitte bis Mittwoch, den 17.01.18, um 10:00 Uhr in den entsprechenden Kasten des Studierendenarbeitsraums (Raum 301) im Mathematischen Institut.
Studierende mit der Gruppennummer **1, 2, 4 oder 5** geben ihre Lösungen zu Blatt 11 bitte im Zeitraum 16.-18.01.18 in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.
Abgaben der Gruppe 3, die nicht bis zur genannten Frist in den Kasten gelegt werden, bzw. Abgaben der Gruppen 1, 2, 4 und 5, die in den Kasten gelegt werden, können aus organisatorischen Gründen leider nicht korrigiert und daher auch nicht mit Punkten versehen werden. Wir bitten um Ihr Verständnis.

1. Aufgabe (4 Punkte)
Ist 0 ein Attraktor für die folgenden Systeme?

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -2x + z \\ y' = x - 3y + z \\ z' = -x - 3z \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} x' = 2xy - x + y \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y \end{cases}$$

2. Aufgabe (4 Punkte)
Finde jeweils ein Ljapunov-Funktion für die folgenden beiden Systeme und entscheide jeweils, ob 0 ein Attraktor ist:

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -x - xy^2 - x^3 \\ y' = -7y + 3x^2y - 2yz^2 - y^3 \\ z' = -5z + y^2z - z^3 \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x - 3y^3 \end{cases}$$

Hinweis: Setze mit einer Linearkombination der Quadrate x^2, y^2, z^2 an.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ mit komplexen Eigenwerten deren Imaginärteile ungleich 0 sind. Sei $\lambda = \mu + i\omega$, $\omega \neq 0$ ein Eigenwert und $v = b - ic \in \mathbb{C}^2$ mit $a, b \in \mathbb{R}^2$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

(a) Zeige, dass die Matrix von A in der Basis (b, c) die Form

$$\begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$$

hat.

Bitte wenden.

(b) Seien $x = (x_1, x_2)$ die Standardkoordinaten und $y = (y_1, y_2)$ die Koordinaten bezüglich der Basis (b, c) von $\mathbb{R}^2$. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung des Systems

$$\varphi'(t) = A\varphi(t)$$

und schreibe $\varphi(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 = y_1(t)b + y_2(t)c$. Zeige, dass es Konstanten R, θ gibt mit

$$\begin{aligned} y_1(t) &= Re^{\mu t}\cos(wt - \theta) \qquad \text{und} \\ y_2(t) &= Re^{\mu t}\sin(wt - \theta). \end{aligned}$$

(c) Sei $\mu = 0$. Welche Form hat die Bahn von φ falls (b, c) orthonormal ist? Zeigen Sie, dass im Allgemeinen gilt

$$Cx_1^2(t) + 2Dx_1(t)x_2(t) + Ex_2(t) = R^2$$

mit $C > 0$, $E > 0$ und $D^2 - CE < 0$. Die Bahnen sind also Ellipsen.

(d) Finde die Achsen der Ellipsen für

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 3x_2 \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Hinweis: Sei $r^2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$. Die Hauptachsen der Ellipse sind die Richtungen wo $r(t)$ maximal bzw. minimal ist, das heißt $r'(t) = 0$. Es gilt $rr' = x_1x_1' + x_2x_2'$ und durch Substitution von x_1', x_2' erhält man eine Gleichung in x_1, x_2.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Betrachte das Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \in \mathbb{R}[\lambda]$, das heißt $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Realteile aller Nullstellen des Polynoms genau dann negativ sind, wenn $a_1 > 0,\ a_3 > 0$ und $a_1a_2 > a_3$ gilt.