12. Blatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen
Abgabe: 23.-25.01.2018 siehe Hinweis.

Hinweis: Studierende mit der Gruppennummer **3** legen ihre Lösungen zu Blatt 12 bitte bis Mittwoch, den 24.01.18, um 10:00 Uhr in den entsprechenden Kasten des Studierendenarbeitsraums (Raum 301) im Mathematischen Institut.
Studierende mit der Gruppennummer **1, 2, 4 oder 5** geben ihre Lösungen zu Blatt 12 bitte im Zeitraum 23.-25.01.18 in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.
Abgaben der Gruppe 3, die nicht bis zur genannten Frist in den Kasten gelegt werden, bzw. Abgaben der Gruppen 1, 2, 4 und 5, die in den Kasten gelegt werden, können aus organisatorischen Gründen leider nicht korrigiert und daher auch nicht mit Punkten versehen werden. Wir bitten um Ihr Verständnis.

1. Aufgabe (0 Punkte)
Zeige, dass $x(t) = \sin(t^2)e^t$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x''(t) - x'(t) + 4t^2 x(t) = 2(t+1)\cos(t^2)e^t, \;\; x(0) = 0$$

ist.

2. Aufgabe (0 Punkte)
Bestimme die allgemeine Lösung zu

$$x'(t) = -2tx(t) + \cos(t)e^{-t^2} \;\; t \in \mathbb{R}.$$

3. Aufgabe (2 Punkte)
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ für } x > 2, \\ x & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Bestimme eine C^1-Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x'(t) = f(x(t)), \;\; x(0) = 1.$$

4. Aufgabe (0 Punkte)
Finde eine stetig differenzierbare Funktion $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x(0) = 1$ und

$$x'(t) = 2tx(t)(-3 + (x(t))^5).$$

5. Aufgabe (0 Punkte)

Es sei $x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar und $z(t) := e^{-x^2(t)}$. Zeige: $x(t)$ ist eine Lösung der DGL $x'(t) = -\frac{te^{x^2(t)}-2}{2x(t)}$ genau dann wenn $z(t)$ eine Lösung der DGL $z'(t) = -2z(t) + t$ ist.

6. Aufgabe (0 Punkte)

Man betrachte die DGL

$$x'(t) = -\frac{x(t)^2 + 4tx(t)}{2tx(t) + 2t^2}. \tag{1}$$

(a) Finde eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(t_0, x_0) = (1, 2)$ und Funktionen $g, h \colon U \to \mathbb{R}$ mit $h(t, x) \neq 0$ auf U, um zu zeigen, dass die DGL (1) eine exakte DGL der Form $x'(t) = -\frac{g(t,x)}{h(t,x)}$ ist.

(b) Bestimme eine Lösung $x \colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ von (1) mit Anfangswert $x(1) = 2$.

7. Aufgabe (4 Punkte)

Man betrachte die DGL

$$x'''(t) = t^2 \sin(x''(t)) + \cos(x(t)) + 1.$$

(a) Schreibe die DGL in ein System von DGLs erster Ordnung um.

(b) Zeige dass die DGL eine eindeutige Lösung $x \colon \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right] \to \mathbb{R}$ mit $x(0) = 1$ $x'(0) = x''(0) = 0$ besitzt.

8. Aufgabe (2 Punkte)

Zeige: Es gibt keine stetig differenzierbare Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$, $f(\pi) = 2$ und $f'(t) = \cos(t)f(t)$.

9. Aufgabe (0 Punkte)

Berechne explizit eine Fundamentalmatrix zur DGL $x'(t) = Ax(t)$, $t \in \mathbb{R}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Aufgabe (0 Punkte)

Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = t^2 e^{-t}.$$

11. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v : V \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Definiere den Begriff „Attraktor von v".

(b) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $v = -\mathrm{grad} f$. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ so, dass a die einzige Nullstelle von v ist und dass a ein globales Minimum von f ist mit $f(a) = 0$. Zeige, dass a ein Attraktor von v ist.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Es sei $n \geq 1$ und $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Zeige die folgende Identität:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$