Funktionentheorie

Sommersemester 2017

George Marinescu

Einleitung

Die Funktionentheorie ist die Theorie der komplex-differenzierbaren Funktionen, die eine offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ abbilden. Wenngleich die Definition der Differenzierbarkeit für eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ wörtlich dieselbe wie für reelle Funktionen auf einem Intervall ist, gibt es dramatische Unterschiede in der Theorie solcher Funktionen. Zum Beispiel:

- Ist $f : U \to \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar, so ist f beliebig oft differenzierbar und *analytisch*, d.h. die Taylor-Reihe von f stellt f in einer Umgebung des Entwicklungspunktes dar.
- Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar und beschränkt, so ist f konstant (Satz von Liouville).
- Sind $f_n : U \to \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar und konvergiert (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen eine Funktion f, so ist f komplex-differenzierbar (Satz von Weierstrass).

Die Analoga dieser Aussagen sind im Reellen allesamt falsch!

Ziel der Vorlesung ist es, mit möglichst minimalem Begriffsaufwand rasch zu den zentralen Sätzen der Funktionentheorie vorzustoßen, z.B.

- Cauchyscher Integralsatz mit Folgerungen (wie etwa Potenzreihenentwicklungssatz),
- Abbildungseigenschaften analytischer Funktionen (wie z.B. Satz von der Gebietstreue),
- isolierte Singularitiäten, Residuensatz mit Anwendungen,
- Riemannscher Abbildungssatz.

Vorausgesetzt werden gute Kenntnisse der Anfängervorlesung.

Anwendungen der Funktionentheorie liegen in der Zahlentheorie (Primzahlsatz), den partiellen Differentialgleichungen (harmonische Funktionen, Laplace Operator), der algebraischen Topologie (Homotopie, Homologie), in der algebraischen und komplexen Geometrie (Riemannsche Flächen) sowie Physik (Quantenmechanik, String-Theorie), Strömungslehre, Elektrotechnik usw.

Danksagung

Mein Dank gilt Frau Eisele, die das Skipt getecht hat und Matjaz Erat, der Korrektur gelesen hat.

Inhaltsverzeichnis

1. Vorlesung, 18.04.2017

1. Komplexe Zahlen und Funktionen

1.1. Der Körper der komplexen Zahlen.

Die komplexe Ebene und die Riemannsche Zahlenkugel bilden den Grundbereich der Funktionentheorie; dort sind ihre Objekte, die analytischen Funktionen, definiert und dort haben sie ihre Werte.

Auf $\mathbb{R}^2$ führen wir eine Addition und Multiplikation wie folgt ein:

$$\begin{aligned} (x,y)+(u,v) &:= (x+u, y+v) \\ (x,y)\cdot(u,v) &:= (xu-yv, xv+yu)\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1.1. **Satz.** *$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ist ein kommutativer Körper mit Nullelement $(0,0)$ und Einselement $(1,0)$. Dieser Körper heißt **Körper der komplexen Zahlen,** bezeichnet mit $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.*

Das Inverse von $z=(x,y)\neq 0$ ist

$$z^{-1} := \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\Big)$$

Die Abbildung $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$, $\varphi(x)=(x,0)$ hat die Eigenschaften

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \quad , \quad \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) \quad , \quad \varphi(1)=(1,0)\ ,$$

d.h. φ ist ein Körper-Homomorphismus.

Die komplexen Zahlen $\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$ bilden einen Körper mit der induzierten Addition und Multiplikation (1.1). Wir sagen, dass $\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$ ein *Unterkörper* von $\mathbb{C}$ ist. Der Homomorphismus $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$ ist bijektiv, d.h. ein Isomorphismus. Wir *identifizieren* deshalb $\mathbb{R}$ mit $\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$ und sagen, dass $\mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Wir schreiben für $(x,0)$ kurz x, also 0 für $(0,0)$, 1 für $(1,0)$, usw.

1.1.2. **Definition.** Die (nicht-reelle) Zahl $i=(0,1)$ heißt ***imaginäre Einheit*** . Es gilt

$$i^2=(0,1)(0,1)=(0^2-1^2, 0\cdot1+1\cdot0)=(-1,0)=-1.$$

Für $z=(x,y)$ schreiben wir nun

$$z=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)=x+iy.$$

Dann heißt x ***Realteil*** von z, und y heißt ***Imaginärteil*** von z, geschrieben $\operatorname{Re} z := x$, $\operatorname{Im} z := y$. Man beachte, dass der Imaginärteil y reell ist. Zahlen der Form iy mit $y\in\mathbb{R}$ heißen auch (rein) imaginär.

1.1.3. **Definition.** Die ***konjugierte Zahl*** zu $z=x+iy$ ist $\overline{z}:=x-iy$.

1.1.4. **Satz** (Rechenregeln)**.** *Für alle $z,w\in\mathbb{C}$ gilt:*

(i) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.
(ii) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re} z$, $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im} z$.
(iii) $z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$, $z=-\overline{z}\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$.

(iv) $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geqslant 0$ *für* $z = x + iy$.
(v) $\overline{\overline{z}} = z$.

1.1.5. **Definition.** Für $z \in \mathbb{C}$ heißt $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ der ***Betrag*** von z. Für $z \in \mathbb{R}$ ist $|z| = \sqrt{z^2}$ der übliche Betrag von reellen Zahlen.

1.1.6. **Satz** (Rechenregeln für den Betrag). *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt:*

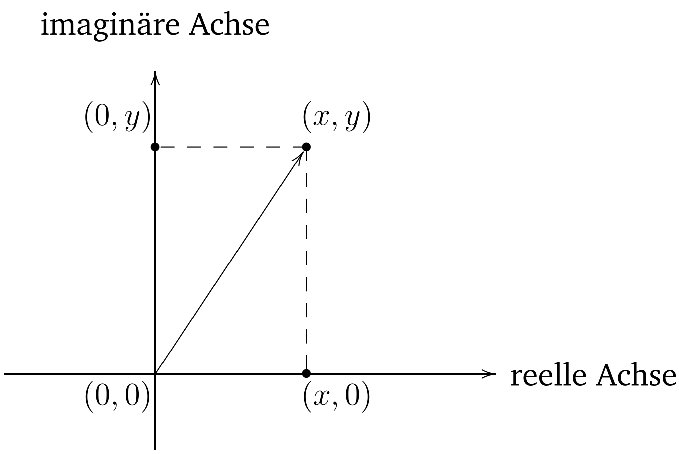
(i) $|z| \geqslant 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
(ii) *Ist* $z \neq 0$*, so gilt* $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$.
(iii) $|\overline{z}| = |z|$.
(iv) $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$.
(v) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
(vi) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (***Dreiecksungleichung***).
Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $z = 0$ (*bzw.* $w = 0$) *oder* $w/z \in \mathbb{R}_+$ (*bzw.* $z/w \in \mathbb{R}_+$).
(vii) $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|$ (***umgekehrte Dreiecksungleichung***).

Beweis: Zu (vi): Ist $z + w = 0$, so ist die Aussage klar, Ist $z + w \neq 0$ so gilt:

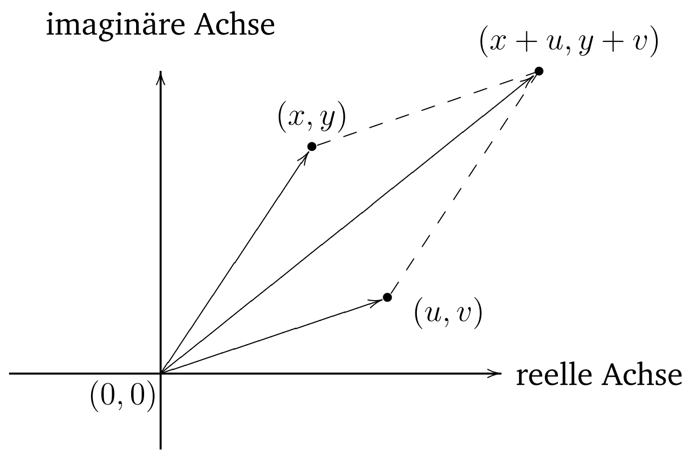
$$\frac{|z| + |w|}{|z + w|} = \left|\frac{z}{z + w}\right| + \left|\frac{w}{z + w}\right| \overset{(iv)}{\geqslant} \operatorname{Re}\frac{z}{z + w} + \operatorname{Re}\frac{w}{z + w} = \operatorname{Re}\frac{z + w}{z + w} = 1\,.$$

□

1.1.7. **Geometrische Deutung der komplexen Zahlen.** Wir veranschaulichen uns seit Gauß die komplexen Zahlen geometrisch als Punkte in einer Ebene mit rechtwinkligen Koordinaten, genannt ***Gaußsche Zahlenbene*** (oder als Vektoren mit Ursprung im Nullpunkt $(0, 0)$ und Endpunkt in (x, y)).



Die Addition komplexer Zahlen ist dann die übliche Vektoraddition nach der Parallelogrammregel.



$|z|$ ist der Euklidische Abstand des Punktes $z = (x, y)$ zum Ursprung.
$\overline{z}$ ist die Spiegelung des Punktes $z = (x, y)$ an der reellen Achse.

Die Ungleichung $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ ist genau die Dreiecksungleichung aus der Geometrie: Im Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten stets mindestens so groß wie die Länge der dritten Seite.

Wir wollen nun die Multiplikation geometrish interpretieren. Wir erinnern die ***Eulersche Formel***:

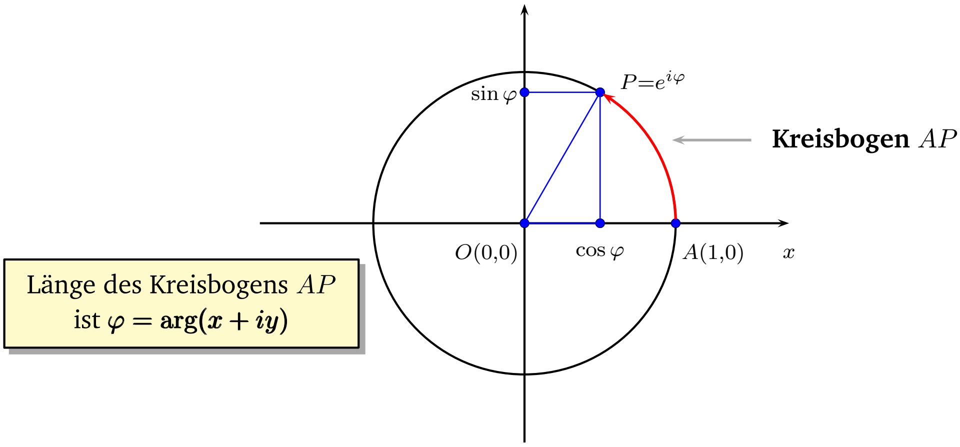
(1.2) $$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \qquad \text{wobei } \cos\varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi},\ \sin\varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}.}$$

Die Eulersche Formel ist eine der wichtigsten und schönsten der Mathematik. Wir werden sie später beweisen (sie erscheint übrigens schon in Analysis I). Um sie besser einzuschätzen, geben wir die geometrischen Definitionen von Sinus und Cosinus.

1.1.8. **Definition.** Sei $\varphi \in [0, 2\pi)$. Definiere $(\cos_{geom}\varphi, \sin_{geom}\varphi)$ als die Koordinaten des Punktes P aus dem Einheitskreis, so dass die Bogenlänge des Kreisbogens AP (gemessen gegen den Uhrzeigersinn) gleich φ ist. Dann setze die Funktionen $\cos$ und $\sin$ auf $\mathbb{R}$ fort, als periodische Funktionen mit der Periode 2π.

Diese Definition entspricht auch der Definition von Cosinus und Sinus als Ankathete/Hypothenuse und Gegenkathete/Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck.

1.1.9. **Satz.** *Die Bogenlänge des Kreisbogens AP mit $P = e^{i\varphi}$ ist φ. Daher stimmen die geometrischen und analytischen (Eulerschen) Definitionen von $\cos$ und $\sin$ überein.*



Beweis: Im nächsten Satz sehen wir, dass der Kreisbogen AP durch $c:[0,\varphi]\to\mathbb{C}$, $c(t)=e^{it}=\cos t + i\sin t$ parametrisiert werden kann. Dessen Bogenlänge ist

$$\int_0^{\varphi} |c'(t)|\,dt = \varphi\,.$$

da $c'(t) = ie^{it}$. $\square$

So betrachtet bildet die Eulersche Formel eine Brücke zwischen den beiden Definitionen. Sie zeigt zum Beispiel, dass die geometrisch definierten trigonometrischen Funktionen analytisch sind.

1.1.10. **Satz** (Parametrisierung der Kreislinie).
(i) *Die Abbildung* $p:\mathbb{R}\longrightarrow S^1$, $p(\varphi)=e^{i\varphi}=\cos\varphi + i\sin\varphi$ *ist ein Gruppenmorphismus der additiven Gruppe* $(\mathbb{R},+)$ *auf die multiplikative Gruppe* $(S^1,\,\cdot\,)$ *mit dem Kern* $2\pi\mathbb{Z}$. *Es gilt* $e^{i\varphi_1}=e^{i\varphi_2}$ *genau dann, wenn* $\varphi_1-\varphi_2\in 2\pi\mathbb{Z}$.
(ii) *Sei* $I\subset\mathbb{R}$ *ein halboffenes Intervall der Länge* 2π. *Dann ist* $p|_I : I\longrightarrow S^1$ *bijektiv und stetig. Ist* $a\in I$ *ein Endpunkt von* I, *so ist die Umkehrung* $(p|_I)^{-1}$ *stetig auf* $S^1\setminus\{p(a)\}$ *und unstetig in* $p(a)$.

Beweis: Die Abbildung p ist ein Gruppenhomomorphismus wegen der Potenzregel $e^{z+w}=e^ze^w$. Es ist $\ker p=\{\varphi : \cos\varphi = 1, \sin\varphi = 0\} = 2\pi\mathbb{Z}$. Sei $(x,y)\in S^1$, d. h. $x^2+y^2=1$. Wir suchen $\varphi\in\mathbb{R}$, mit $\cos\varphi = x$, $\sin\varphi = y$. Die Abbildung $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ ist bijektiv und $x\in[-1,1]$, setze also $\varphi=\arccos x\in[0,\pi]$. Für $\varphi\in[0,\pi]$ ist $\sin\varphi$ nicht-negativ, also $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{y^2}=|y|$. Ist $y\geqslant 0$ so passt also die Lösung $\varphi=\arccos x$. Ist $y<0$, so erfüllt $\varphi=-\arccos x\in(-\pi,0)$ beide Gleichungen. So haben wir gezeigt, dass $p|_{(-\pi,\pi]}:(-\pi,\pi]\to S^1$ (also auch p) surjektiv ist mit der Inverse

$$(p|_{(-\pi,\pi]})^{-1}(x+iy) = \begin{cases} \arccos(x)\,,\; y\geqslant 0\,,\\[2ex] -\arccos(x)\,,\; y<0\,.\end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig auf $S^1\setminus\{-1\}$ und unstetig in -1. $\square$

1.1.11. **Definition.**
(a) Die Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $p(\varphi) = e^{i\varphi}$ heißt die ***Standardparametrisierung des Einheitskreises*** S^1.
(b) Für $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißt $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\varphi} = z/|z|$ ein ***Argument*** oder ein ***Wert des Arguments*** von z. Setze

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\,, \quad \operatorname{Arg}(z) := \left\{\varphi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} = z/|z|\right\}.$$

$\operatorname{Arg}(z)$ heißt die ***Menge der Argumente*** von z. Die einzige Zahl $\arg(z)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\operatorname{Arg}(z) \cap (-\pi, \pi] = \{\arg(z)\}$$

heißt ***das Argument*** oder ***Hauptwert des Arguments*** von z. Der Zahl $z = 0$ wird kein Argument zugeordnet.
(c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall der Länge 2π. Die Abbildung $\mathbb{C}^* \to I$, $z \mapsto (p|_I)^{-1}(z/|z|)$ heißt ein ***Zweig des Arguments***. Die Abbildung $\arg : \mathbb{C}^* \longrightarrow (-\pi, \pi]$, $z \mapsto \arg(z)$ heißt ***Hauptzweig des Arguments***.

Der Hauptzweig des Arguments ist so gewählt, dass $\operatorname{Im}\log(z) = \arg(z)$, wobei $\log$ der Hauptzweig des Logarithmus ist. Eine konkrete Formel für $\arg$ ist gegeben durch

$$\arg : \mathbb{C}^* \longrightarrow (-\pi, \pi]\,,\ \arg z = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right)\,, \ \operatorname{Im} z \geqslant 0\,, \\[2ex] -\arccos\left(\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right)\,, \ \operatorname{Im} z \leqslant 0\,, z \notin \mathbb{R}_-. \end{cases}$$

Dabei ist $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ die negative reelle Achse. Sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ die entlang der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene. Dann ist $\arg$ stetig auf $\mathbb{C}_-$ und unstetig in allen Punkten von $\mathbb{R}_-$. Dort macht $\arg$ einen Sprung von 2π:

$$\lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z<0}} \arg(z) = \arg(a) = \pi\,, \qquad \lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z<0}} \arg(z) = -\pi$$

1.1.12. **Satz.** *Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ hat die Form*

(1.3) $$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \textit{mit}\ \ r = |z|\ \ \textit{und}\ \ \varphi \in \operatorname{Arg}(z)\,.$$

$P : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, $(r, \varphi) \mapsto re^{i\varphi}$ ist bijektiv und stetig. Die Umkehrabbildung $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi]$, $z \mapsto (|z|, \arg(z))$ ist stetig auf $\mathbb{C}_-$ und unstetig in allen Punkten der negativen reellen Achse $\mathbb{R}_-$.

Die Form (1.3) heißt Polarkoordinatendarstellung von z und (r, φ) heißen die ***Polarkoordinaten*** von z. Die Abbildung P heißt ***Polarkoordinatenabbildung***.

Wir haben nun für $z \in \mathbb{C}^*$ zwei Koordinatensysteme: die kartesichen Koordinaten $(x, y) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ und die Polarkoordinaten $(r, \varphi) = (|z|, \arg(z))$. Für viele Probleme ist es vorteilhaft, die Polarkoordinaten zu benutzen.

Zum Beispiel ist die Multiplikation zweier in Polarkoordinaten $z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |z|e^{i\psi}$ gegebener Zahlen besonders einfach: Es ist $zw = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}$. Die Multiplikationsregel für komplexe Zahlen lautet also: „Die Längen werden multipliziert, die Argumente werden addiert“. Daraus folgt die ***Moivresche Formel***:

$$\boxed{\big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.}$$

Eine komplexe Zahl z heißt n***-te Einheitswurzel*** ($n \in \mathbb{N}$), falls $z^n = 1$ gilt.

1.1.13. **Satz.** *Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n verschiedene n-te Einheitswurzeln, nämlich*

$$\zeta_\nu = e^{\frac{2\pi\nu}{n}i} = \cos\frac{2\pi\nu}{n} + i\sin\frac{2\pi\nu}{n}\,, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n-1\,.$$

Sie liegen regelmäßig verteilt auf der Einheitskreislinie $|z| = 1$ im Winkelabstand $2\pi/n$.

Sei $w \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung $z^n = w$ hat genau n Lösungen, genannt n-ten Wurzeln (oder Werte der n-ten Wurzel) aus w, nämlich

$$z_\nu = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi\nu}{n}}\,, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n-1\,,$$

wobei $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$.

2. Vorlesung, 24.04.2017

Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn X die *Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft* hat, d.h. wenn aus jeder offenen Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von X endlich viele $i_1,\dots,i_k$ ausgewählt werden können so, dass schon $X=\bigcup_{r=1}^k V_{i_r}$. Die Familie $(V_{i_1},\dots,V_{i_k})$ heißt Teilüberdeckung, und die Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft kann auch so formuliert werden: Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung[1].

In $\mathbb{C}$ gelten die Sätze von Bolzano-Weierstrass und Heine-Borel.

1.1.14. **Satz** (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt einen Häufungswert.*

1.1.15. **Satz** (Heine-Borel). *Sei $K\subset\mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) K ist kompakt, d.h. jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

(ii) K ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in K hat eine in K konvergente Teilfolge.

(iii) K ist abgeschlossen und beschränkt.

1.1.16. **Satz** (Satz vom Maximum und Minimum (Weierstrass)). *Sei $K\subset\mathbb{C}$ eine nichtleere kompakte Menge. Dann ist jede stetige Funktion $f:K\to\mathbb{C}$ beschränkt und ihr Absolutbetrag nimmt ihr Maximum und sein Minimum an, d. h. es gibt $\zeta_1,\zeta_2\in K$ mit $|f(\zeta_1)|\leqslant|f(z)|\leqslant|f(\zeta_1)|$ für alle $z\in K$.*

Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung von X in zwei nichtleere disjunkte offene Teilmengen U,V gibt.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) X ist zusammenhängend.

(ii) Ist $U\in X$ nichtleer, offen und abgeschlossen, so gilt $U=X$.

(iii) Jede lokal-konstante Funktion auf X ist konstant.

(iv) Jede stetige Funktion von X nach $\{0,1\}$ ist konstant.

Sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $\gamma:[a,b]\longrightarrow X$ heißt *Weg*. Der Punkt $\gamma(a)$ heißt *Anfagspunkt* und der Punkt $\gamma(b)$ heißt *Endpunkt* von γ. Wir sagen auch, dass γ *verbindet* $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$.

Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn je zwei Punkte durch einen Weg verbunden werden können.

1.1.17. **Satz.** *Ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist zusammenhängend.*

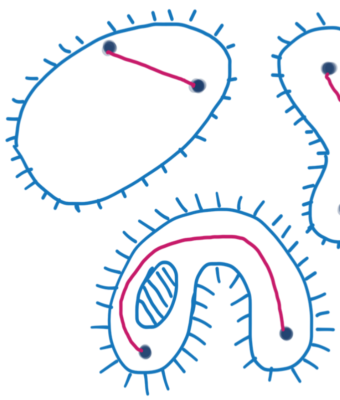
Die Umkehrung ist falsch (siehe Übungsblätter).

Sei nun X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A\subset X$ heißt zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend), falls A versehen mit der Teilraumtopologie zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend) ist. Wir interessieren uns in der Funktionentheorie für Teilmengen von $\mathbb{C}$. Auf einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ betrachte wir

[1] „Teil“ heißt nicht, dass nur ein Teil von X überdeckt wird, sondern dass man nur eine Teilmenge der Indizes benutzt.

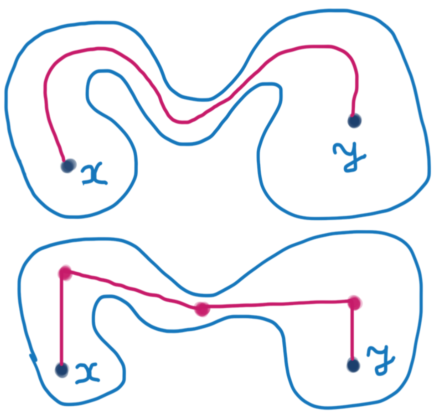
stets die Teilraumtopologie induziert durch die standard Topologie von $\mathbb{C}$. Somit können wir über zusammenhängende (bzw. wegzusammenhängende) Teilmengen von $\mathbb{C}$ reden. Eine offene und zusammenhängende Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ heißt ***Gebiet***.

Für $z, w \in \mathbb{C}$ heißt $[z, w] = \{(1-t)z + tw : t \in [0,1]\}$ die *Strecke* von z nach w. Eine Menge $A \in \mathbb{C}$ heißt ***konvex***, falls für alle $z, w \in A$ gilt $[z, w] \in A$. Eine Menge $A \in \mathbb{C}$ heißt ***sternförmig***, falls es ein $z \in A$ gibt, so dass für alle $w \in A$ gilt $[z, w] \in A$. Jede konvexe Menge ist sternförmig, jede sternförmige Menge ist wegzusammenhängend (also zusammenhängend). Kreisscheiben und Halbebenen sind konvex (insbesondere die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$). Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, wobei $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, ist nicht konvex aber sternförmig.



Konvex, sternförmig, wegzusammenhängend...

1.1.18. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
(i) D ist zusammenhängend (d. h. D ist ein Gebiet).
(ii) D ist wegzusammenhängend.
(iii) Für jede $x, y \in D$ gibt es einen Streckenzug $[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{k-1}, x_k] \subset D$ wobei $x_0 = x$ und $x_k = y$.



Beliebiger Weg und Streckenzug zwischen x und y

1.1.19. **Definition** (Wegekomponente)**.** Sei X ein topologischer Raum. Zwei Punkten x, y heißen *wege-äquivalent*, falls sie durch einen Weg verbunden werden können. Dies ist eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen heißen ***Wegekomponenten*** von X. Der Raum X ist disjunkte Vereinigung seiner Wegekomponenten.

1.1.20. **Satz.**
(i) Die Wegekomponenten einer offenen Menge in $\mathbb{C}$ sind offen (also Gebiete).
(ii) Eine offene Menge in $\mathbb{C}$ hat höchstens abzählbar viele Wegekomponenten.

1.1.21. **Bemerkung.** Sei X ein topologischer Raum. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen A von X, die $x \in X$ enthalten, heißt ***Zusammenhangskomponente*** $X(x)$ von x. Die Wegekomponenten einer offenen Menge in $\mathbb{C}$ sind offen und stimmen mit den Zusammenhangskomponenten überein. Deshalb sprechen wir auch kurz einfach von ***Komponenten***.

1.2. Riemannsche Sphäre.

Wir ergänzen $\mathbb{C}$ durch ein (ideales) Element $\infty \notin \mathbb{C}$ und setzten $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\widehat{\mathbb{C}}$ heißt die ***erweiterte Zahlenebene***.

Wir führen eine Topologie auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ein: $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ heißt offen genau dann, wenn $U \cap \mathbb{C}$ offen ist und falls $\infty \in U$, gibt es $M > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} \subset U$. Eine Menge $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \in U$ ist offen genau dann, wenn $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ kompakt in $\mathbb{C}$ ist. Für eine Folge (z_n) in $\widehat{\mathbb{C}}$ gilt $z_n \to \infty$, $n \to \infty$, genau dann, wenn $|z_n| \to \infty$, $n \to \infty$.

Setze $S^2 = \{(w,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3 : |w|^2 + t^2 = 1\}$. Mit Hilfe der stereographischen Projektion definiere

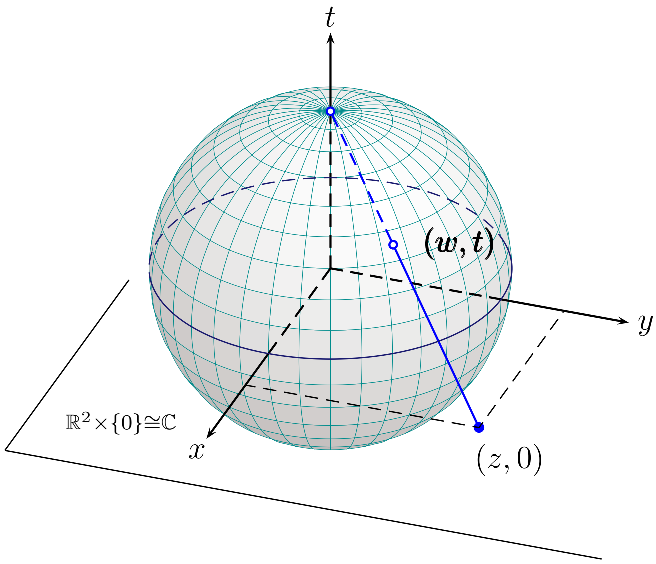
$$\sigma : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}\,, \quad \sigma(w,t) = \begin{cases} \dfrac{w}{1-t}\,, & (w,t) \neq (0,1) \\ \infty\,, & (w,t) = (0,1) =: N \end{cases}$$

(Man setzt die stereographische Projektion fort zu einer Bijektion von S^2 auf $\widehat{\mathbb{C}}$ durch $\sigma(N) = \infty$.) Die Umkehrung ist gegeben durch

$$\sigma^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \to S^2,, \quad \sigma^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{2z}{1+|z|^2}\,, \dfrac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right), & z \neq \infty \\ N\,, & z = \infty \end{cases}$$

1.2.1. **Satz.** *σ ist ein Homöomorphismus.*

Deshalb betrachten wir S^2 als ein Modell für $\widehat{\mathbb{C}}$ und nennen $\widehat{\mathbb{C}}$ auch ***Riemannsche Sphäre***.



Erweiterung der algebraischen Operationen:

(1.4)
$$a \cdot \infty = \frac{a}{0} = \infty\,, \quad \text{für } a \neq 0$$
$$a \pm \infty = \infty\,, \quad \frac{a}{\infty} = 0\,, \quad \text{für } a \neq \infty$$
$$\infty + \infty = \infty$$

Nicht definiert sind $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Vorlesung, 26.04.2017

1.3. Potenzreihen, Exponentialfunktion, Logarithmus.

1.3.1. **Definition.** Eine Funktionenreihe $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ heißt ***Potenzreihe*** mit Koeffizienten a_n und Entwicklungspunkt z_0. Der ***Konvergenzradius*** der Reihe ist

$$R := \sup\left\{t \in [0,\infty) : (|a_n|t^n) \text{ beschränkt}\right\} \in [0,\infty] .$$

Wir verabreden, dass $B_R(z_0) := \mathbb{C}$, falls $R=\infty$.

1.3.2. **Satz.**
(a) *Die Reihe ist in der Kreisscheibe $B_R(z_0)$ absolut konvergent.*
(b) *Die Reihe ist in jeder Kreisscheibe $B_\rho(z_0)$ mit $\rho < R$ normal (also auch gleichmäßig) konvergent.*
(c) *Die Reihe ist für $|z| > R$ divergent.*

$B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ heißt ***Konvergenzbereich*** der Potenzreihe. Die Potenzreihe definiert eine Funktion $P : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz in allen $B_\rho(z_0)$ mit $\rho < R$ ist P stetig.
Für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ wird die *Supremumsnorm* durch

$$\|f\|_D := \sup\left\{|f(z)| : z \in D\right\} \in [0,\infty] .$$

eingeführt. Eine Reihe $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ von Funktionen $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *normal konvergent*, falls $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_D$ konvergiert. Konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ normal, so konvergiert sie auch gleichmäßig. Konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ gleichmäßig und sind f_n stetig in D, so ist auc die Summe $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ der Reihe stetig in D,

1.3.3. **Satz.** *Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$. Dann gilt:*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} , \qquad \text{(Cauchy-Hadamard–Formel)} \tag{1.5}$$

und

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| , \tag{1.6}$$

falls der Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert.

1.3.4. **Definition.** Die ***Exponentialreihe*** ist die Potenzreihe

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} .$$

Der Konvergenzradius ist nach (1.6) $R=\infty$, da $a_n = 1/n!$ und $|a_n/a_{n+1}| = n+1$. Die Exponentialreihe definiert also eine Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} , \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C} , \tag{1.7}$$

genannt ***Exponentialfunktion***.

Es gilt

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \qquad \text{(Eulersche Zahl)}.$$

Mit Hilfe des Satzes vom Cauchy-Produkt (Analysis I, 3.3.6) erhalten wir die ***Funktionalgleichung*** (***Additionstheorem***) ***der Exponentialfunktion***:

$$\boxed{\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,.} \tag{1.8}$$

Es ist klar, dass $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$, für $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \in \mathbb{R}$ für $z \in \mathbb{R}$, $|\exp(z)| = 1$, für $z \in i\mathbb{R}$, $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$, für $z \in \mathbb{C}$. Wegen $\exp(0) = 1$, folgt aus (1.8), dass

$$\exp(-z) = \exp(z)^{-1} = \frac{1}{\exp(z)}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.9}$$

Die Gleichung (1.8) besagt, dass $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Aus (1.8), (1.9) ergibt sich leicht, dass $\exp(r) = e^r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Die Exponentialfunktion stimmt für rationale Zahlen mit Potenzen von e überein. Dies motiviert die folgende Definition.

1.3.5. **Definition.** Für $z \in \mathbb{C}$ sind die komplexen Potenzen von e definiert als

$$\boxed{e^z := \exp(z)}\,.$$

Damit wird die Funktionalgleichung zur ***Potenzregel***:

$$e^{z+w} = e^z\, e^w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,. \tag{1.10}$$

Wir verwenden beide Schreibweisen, e^z und $\exp(z)$.

Die trigonometrischen Funktionen wurden in der Vorlesung Analysis I ausführlich untersucht. Sie sind Abkömmlinge der Exponentialfunktion, die Mutter vieler interessanter Funktionen. Ihre Eigenschaften setzen wir als bekannt voraus.

1.3.6. **Definition** (Euler). Sei $z \in \mathbb{C}$. Definiere

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\,, \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\,,$$
$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})\,, \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})\,.$$

Es folgt (durch Einsetzen der Potenzreihen-Darstellung von e^{iz} und e^{-iz})

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \qquad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n}$$

Alle diese Reihen haben Konvergenzradius ∞, da die Exponentialreihe Konvergenzradius ∞ hat.

Die Definition impliziert sofort

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z\,.$$

Dies ist i.A. nicht die Zerlegung in Real- und Imaginärteil von e^{iz}. Wenn aber $\varphi \in \mathbb{R}$, so gilt $\cos\varphi, \sin\varphi \in \mathbb{R}$ und wir erhalten die ***Eulersche Formel*** (1.2):

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \qquad \text{wobei } \cos\varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi},\ \sin\varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}.} \tag{1.11}$$

1.3.7. **Satz.** *Die Exponentialabbildung* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *ist eine surjektive und periodische Abbildung mit Periode* $2\pi i$. *Für* $z \in \mathbb{C}^*$ *gilt* $\exp^{-1}(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z) =: \operatorname{Log}(z)$. *Die Einschränkung* $\exp : \{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\} \to \mathbb{C}^*$ *ist stetig und bijektiv. Deren Umkehrung, gegeben durch*

$$\log : \mathbb{C}^* \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}\,, \quad z \mapsto \log|z| + i\arg z\ ,$$

ist stetig auf $\mathbb{C}_-$ *und unstetig auf* $\mathbb{R}_-$. *Für alle reellen Zahlen* $a \in \mathbb{R}_-$ *gilt*

$$\lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z>0}} \log(z) = \log(a) = \log|a| + i\pi\,, \quad \lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z<0}} \log(z) = \log|a| - i\pi\ ,$$

d.h. $\log$ *macht beim Überqueren der negativen reellen Achse einen „Sprung von* $2\pi i$*“.*

1.3.8. **Definition.**
(a) Sei $z \in \mathbb{C}^*$. Eine Zahl $w \in \exp^{-1}(z)$ (d.h. eine Zahl, die die Gleichung $e^w = z$ erfüllt) heißt ***ein Logarithmus*** (oder ***Wert des Logarithmus***) von z. Die Zahl $\log(w)$ ist ein Logarithmus von z und heißt ***Hauptwert des Logarithmus*** von z.
(b) Eine stetige Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ heißt ***Logarithmusfunktion*** oder ***Zweig des Logarithmus*** in G, wenn gilt $e^{l(z)} = z$ für alle $z \in G$, d.h. wenn l eine stetige Umkehrung von $\exp$ ist. Die soeben eingeführte lokale Umkehrung

$$\log : \mathbb{C}_- \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

ist stetig und heißt ***Hauptzweig des Logarithmus***. Sie ist eine komplexe Fortsetzung des gewöhnlichen reellen (natürlichen) Logarithmus $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

1.3.9. **Bemerkung.** Aus Sicht der reellen Analysis ist die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ein lokaler $\mathscr{C}^\infty$ Diffeomeorphismus und sogar eine Überlagerung. Die Abbildung $\log : \mathbb{C}_- \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ist eine $\mathscr{C}^\infty$ lokale Umkehrung von $\exp$.

2. Holomorphe Funktionen

2.1. Definition und erste Eigenschaften.

2.1.1. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ***komplex differenzierbar*** in $z_0 \in D$, wenn

$$f'(z_0) := \frac{df}{dz}(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{in } \mathbb{C} \text{ existiert.} \tag{2.1}$$

Diese Zahl heißt dann die (komplexe) ***Ableitung*** von f in z_0. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ***holomorph*** in D, falls f komplex differenzierbar in allen Punkten $z \in D$ ist; f heißt ***holomorph in*** $z_0 \in D$, wenn f holomorph in einer offenen Umgebung von z_0 ist.

Diese Definition erhalten wir durch Übertragung der Definition der Differenzierbarkeit in einer reellen Veränderlichen. Auf gleiche Weise wie in der reellen Analysis zeigt man:

2.1.2. **Lemma.** *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*
(i) f *ist komplex differenzierbar in* z_0
(ii) Es gibt $\lambda \in \mathbb{C}$ *und* $\rho : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit* $\lim_{z \to z_0} \frac{\rho(z)}{z - z_0} = 0$ *und*

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + \rho(z)$$

(iii) Es gibt $L \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ *mit* $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + o(|z - z_0|)$, $z \to z_0$*.*
In diesem Falle gilt $f'(z_0) = \lambda$ *und* $L(v) = f'(z_0) \cdot v$ *für* $v \in \mathbb{C}$*.*

Dabei bezeichnet $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ den Raum der $\mathbb{C}$–linearen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

Sei nun $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, wobei $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Wir identifizieren f mit einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto ((x, y), v(x, y))$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \supset D \arrow[r, "z \longmapsto f(z)"] \arrow[d, "z \mapsto (x,y)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "z \mapsto (x,y)"] \\
\mathbb{R}^2 \supset D \arrow[r, "(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Die Funktion f heißt reell-differenzierbar, wenn $L \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ existiert mit $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + o(|z - z_0|)$, $z \to z_0$. Die Abbildung L ist das Differential von f in z_0 und wird bezeichnet mit $L = df(z_0)$. Ist f reell-differenzierbar in z_0, so existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\,,$$

und

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\, dy\,.$$

Dabei sind

$$dx\,, dy : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad dx(z) = dx(x + iy) = x\,, \quad dy(z) = dy(x + iy) = y\,.$$

4. Vorlesung, 03.05.2017

2.1.3. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) f ist komplex-differenzierbar in z_0,
(ii) f ist reell-differenzierbar in z_0 und $df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$-linear,
*(iii) f ist reell-differenzierbar in z_0 und erfüllt zusätzlich die **Cauchy-Riemann-Gleichungen**:*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0} \tag{2.2}$$

d.h.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \tag{2.3}$$

In diesem Falle gilt

$$\boxed{df(z_0)(v) = f'(z_0)\cdot v\,, \quad \textit{für } v \in \mathbb{C}.} \tag{2.4}$$

Beweis: (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) ist klar, da $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \subset \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.
Zu (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): $df(z_0) \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ mit $df(z_0)(z) = \lambda \cdot z \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ mit

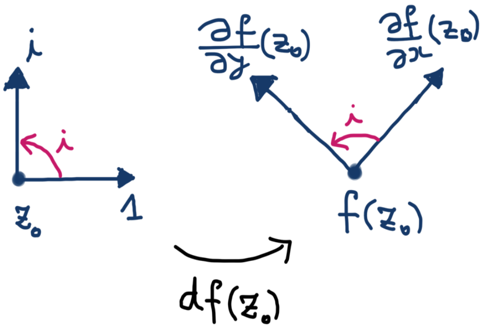
$$df(z_0)\cdot 1 = \lambda\,, \quad df(z_0)\cdot i = i\lambda\,.$$

d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "z\mapsto \lambda\cdot z"] \arrow[d, "z\mapsto (x,y)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "z\mapsto (x,y)"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "df(z_0)"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Wir wissen aus Analysis II, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0)\cdot e_1$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0)\cdot e_2$, wobei $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$. Durch den Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x + iy$ werden e_1 und e_2 auf 1 und i abgebildet. Es folgt

$$df(z_0)\cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\,, \quad df(z_0)\cdot i = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,.$$



Also $df(z_0) \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \iff$ (2.2). Wenn wir Realteil und Imaginärteil von (2.2) betrachten, erhalten wir (2.3). $\square$

Ist $f'(z_0) \neq 0$ so ist die lineare Abbildung $df(z_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine *Ähnlichkeitstransformation*: sie entspricht eine Streckung mit dem Faktor $|f'(z_0)|$ zusammengesetzt mit einer Rotation von Winkel $\arg f'(z_0)$.
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ reell-diffbar in $z_0 \in D$. Das Differential von f in z_0 ist

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$$

wobei $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ ist. $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ ist 2-dimensional mit Basis $\{dx, dy\}$.

Betrachte die folgenden Unterräume:

$$\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) := \{\ell : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \ \ell \ \mathbb{C}\text{–linear}\}$$
$$\mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) := \{\ell : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \ \ell \ \mathbb{C}\text{–antilinear}\}$$

(ℓ $\mathbb{C}$–antilinear $:\iff$ ℓ $\mathbb{R}$–linear und $\ell(\lambda z) = \overline{\lambda}\ell(z)$ für $\lambda, z \in \mathbb{C}$)

Eine Basis in $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ ist $\{dz\}, dz = dx + idy$, und eine Basis in $\mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ ist $\{d\overline{z}\}, d\overline{z} = dx - idy$. Es gilt

$$\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) = \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \oplus \mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \ .$$

Zu $\ell \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, $\ell = a\,dx + b\,dy$, gibt es eine eindeutig bestimmte Zerlegung $\ell = \ell_1 + \ell_2$ mit $\ell_1 \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, $\ell_2 \in \mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$:
Wegen

$$dx = \frac{dz + d\overline{z}}{2} \quad , \quad dy = \frac{dz - d\overline{z}}{2i}$$

$$\begin{aligned} \ell = adx + bdy &= a\frac{dz + d\overline{z}}{2} + b\frac{dz + d\overline{z}}{2i} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(a - ib)dz}_{=:\ell_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(a + ib)d\overline{z}}_{=:\ell_2} \ . \end{aligned}$$

Für $\ell = df(z_0), a = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ folgt die Zerlegung in $\mathbb{C}$–lineare und $\mathbb{C}$–antilineare Komponenten von $df(z_0)$:

$$\boxed{df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)d\overline{z}.}$$

wobei

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big). \tag{2.5}$$

Wir erhalten erneut:

f ist $\mathbb{C}$-differenzierbar in z_0 $\iff$ f ist $\mathbb{R}$-differenzierbar in z_0 & $df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$–linear
$\iff$ f ist $\mathbb{R}$-differenzierbar in z_0 & die $\mathbb{C}$–antilineare Komponente von $df(z_0)$ verschwindet
$\iff$ f ist $\mathbb{R}$-differenzierbar in z_0 und $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0}$
(**Cauchy-Riemannsche-Gleichungen**)

Ist f komplex-diferrenzierbar, so gilt nach (2.2), (2.5)

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0) \cdot 1 = f'(z_0). \tag{2.6}$$

Wenn wir z und $\overline{z}$ als Variablen betrachten und eine Funktion

$$f(x,y) = f\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\Big)$$

nach z und $\overline{z}$ mittels Kettenregel ableiten, erhalten wir die Formel (2.5). Dies bedeutet, dass wir $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ durch formelles Differenzieren nach den Variablen z und $\overline{z}$ erhalten.
Dies erleichtert viele Rechnungen. Z.B.

$$\frac{\partial}{\partial z} z^n = nz^{n-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} z^n = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}|z|^2 = \frac{\partial}{\partial z}(z\overline{z}) = \overline{z}.$$

Die Variablen z und $\overline{z}$ sind sicherlich abhängig voneinander, aber beim Differenzieren nach den konjugiert komplexen Variablen z und $\overline{z}$ darf man so tun, als ob z und $\overline{z}$ unabhängige Variable seien. Die Cauchy-Riemannsche-Gleichungen kann man so deuten: Holomorphe Funktionen sind unabängig von $\overline{z}$ und hängen nur von z ab.

Einige leichte Folgerungen aus Def. 2.1.1:

2.1.4. **Folgerung.** *Ist f komplex-differenzierbar in z_0, so ist f stetig in z_0.*

2.1.5. **Folgerung.** *Ist D ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = 0$, für alle $z \in D$, so ist f konstant.*

Beweis: f holomorph $\Rightarrow$ f reell-differenzierbar und $df(z) = f'(z)dz = 0$, für alle $z \in D$. Nach dem Konstanzkriterium (Skript 9.4.2; Königsberger 2, Kap. 2, §2.2.) ist f konstant. $\square$

Zusatz. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) f lokal-konstant (d.h. konstant in jeder Zusammenhangskomponente),

(ii) f holomorph und $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$.

Auf völlig gleiche Weise wie im Reellen beweist man den folgenden Satz.

2.1.6. **Satz** (Rechenregeln für die Ableitung)**.** *Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$. Dann sind $f + g$, λf $(\lambda \in \mathbb{C})$, fg und falls $f'(z_0) \neq 0$ auch $1/f$ in z_0 komplex-differenzierbar und es gilt:*

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0) \quad , \quad (\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f^2(z_0)}$$

2.1.7. **Beispiel.**

(i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist holomorph, $(z^n)' = nz^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Polynome $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, sind holomorph, und $P'(z) = na_n z^{n-1} + \ldots + a_1$, $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Eine rationale Funktion ist definiert als Quotient zweier Polynome $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, $Q \not\equiv 0$: $\quad R : \mathbb{C} \setminus \{z : Q(z) = 0\} \to \mathbb{C}$, $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$,
R ist holomorph auf seinen Definitionsbereich.

(iv) Sei $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

Sei $P : B_R(0) \to \mathbb{C}, P(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann ist P holomorph und es gilt

$$P'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \ , \ \text{ d.h.}$$

eine Potenzreihe darf im Kovergenzbereich gliedweise differenziert werden.

Beweis: Sei $z_0 \in B_R(0)$. Wähle $\rho < R$ mit $z_0 \in B_\rho(0)$. Wir stellen fest:

- Die Funktionenreihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ konvergiert in $B_\rho(0)$.
- Die Reihe der Differentiale

$$\sum_{n\geq 0} d(a_n z^n) = \sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1} dz = \Big(\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}\Big) dz$$

konvergiert gleichmäßig in $B_\rho(0)$, da $\sum\limits_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ Konvergenradius R hat.

Daraus folgt, dass P reell-differenzierbar in $B_\rho(0)$ ist, also auch in z_0 und

$$dP(z_0) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\Big) dz \ .$$

$dP(z_0)$ ist deshalb $\mathbb{C}$–linear, P ist komplex-differenzierbar und $P'(z_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$.

□

(v) Nach (iv) sind $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)$$

$$\cos'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(z)$$

und analog

$$\sin'(z) = \cos(z)$$

2.1.8. **Satz** (Kettenregel)**.** *Seien $D, G \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f : D \to G$ komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$, g komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$, g komplex-differenzierbar in $w_0 = f(z_0) \in G$. Dann ist $g \circ f$ komplex-differenzierbar in z_0 und gilt*

$$\boxed{(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)} \ .$$

Insbesondere ist $g \circ f$ holomorph, wenn f und g holomorph sind.

Beweis: $g \circ f$ ist reell-differenzierbar und $d(g \circ f)(z_0) = dg(w_0) \circ df(z_0)$ (Kettenregel für Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, siehe Skript 9.1.8 oder Königsberger 2, Kap. 2, §3.1). Nun sind $dg(w_0)$ und $df(z_0)$ $\mathbb{C}$–linear, also auch $d(g \circ f)(z_0)$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ komplex-differenzierbar. Außerdem ist $df(z_0)$ die Multiplikation mit $f'(z_0)$, $dg(w_0)$ die Multiplikation mit $g'(w_0)$, also $dg(w_0) \circ df(z_0)$ die Multiplikation mit $g'(w_0) \cdot f'(z_0)$, d.h. $d(g \circ f)(z_0) = dg(w_0) \circ df(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)\, dz$. Aber $d(g \circ f)(z_0) = (g \circ f)'(z_0)\, dz$. Es folgt $(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)$. □

2.1.9. **Satz.** *Seien $D, G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to G$, so dass*

(i) *f holomorph,*

(ii) *f Homöomorphismus, und*

(iii) *$f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.*

Dann ist auch f^{-1} holomorph und $\boxed{(f^{-1})'(w) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(w))}}$ *für alle $w \in G$.*

Beweis: Sei $w \in G$ fest, $z_0 := f^{-1}(w_0)$. Sei (w_n) eine Folge in G, $w_n \to w_0$, $n \to \infty$ und $w_n \neq w_0$. Dann gilt $z_n := f^{-1}(w_n) \to f^{-1}(w_0) =: z_0$ und $z_n \neq z_0$. Deshalb

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w_0)}{w_n - w_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_0}{f(z_n) - f(z_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z-z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)} \ .$$

Die Folge (w_n) ist beliebig $\Rightarrow$ Behauptung. □

2.1.10. **Beispiel.** Sei $\ell : D \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion. Dann ist ℓ holomorph und es gilt

$$\ell'(z) = \frac{1}{z} \text{ für alle } z \in D\,.$$

2.1.11. **Definition.** Eine Abbildung $f : D \to \widetilde{D}$ zwischen zwei offenen Mengen heißt ***biholomorph***, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} holomorph sind. Zwei offene Teilmengen $D, \widetilde{D} \subset \mathbb{C}$ heißen ***biholomorph äquivalent***, falls eine biholomorphe Abbildung $f : D \to \widetilde{D}$ existiert.

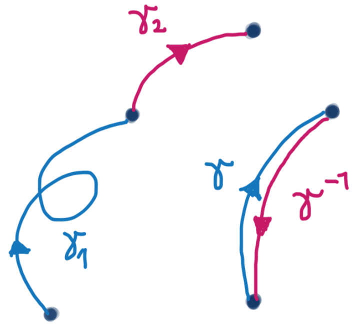
5. Vorlesung, 08.05.2017

2.2. Komplexe Kurvenintegrale.

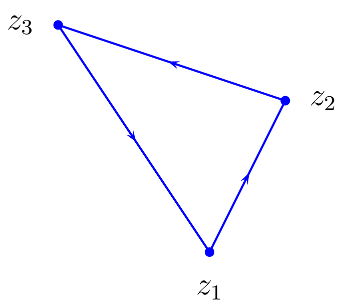
2.2.1. **Definition.** ***Eine (parametrisierte) Kurve*** ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$; $\gamma(a), \gamma(b)$ heißen ***Anfangspunkt*** und ***Endpunkt*** von γ,
$|\gamma| := \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ heißt ***Träger*** oder ***Spur*** von γ.
Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ Kurven, so dass der Endpunkt von γ_1 der Anfangspunkt von γ_2 ist, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Die ***zusammengesetzte Kurve*** ist $\gamma_1 * \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , \ t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(a_2 - b_1 + t) & , \ t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

Eine Kurve heißt ***stückweise*** $\mathscr{C}^1$, wenn man sie in endlich viele $\mathscr{C}^1$–Kurven zerlegen kann, d.h. wenn gilt $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sind $\mathscr{C}^1$–Kurven.
Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve, so heißt $\gamma^{-1} : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$ die ***umorientierte Kurve***.



2.2.2. **Beispiel.** (i) Für $z, w \in \mathbb{C}$ sei $[z, w]$ die Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (1 - t)\, z + tw$, d.h. die *Strecke* von z nach w. Es ist $[z, w]^{-1} = [w, z]$.
Für $z_1, z_2, \ldots, z_m$ bezeichnen wir mit $[z_1, z_2, \ldots, z_m] = [z_1, z_2]*[z_2, z_3]*\ldots*[z_{m-1}, z_m]$ den *Streckenzug* von z_1 nach z_m über $z_2, \ldots, z_{m-1}$. Ein Streckenzug der Form $[z_1, z_2]*[z_2, z_3] * [z_3, z_1]$ heißt *Dreieckskurve*.



(ii) Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Dann definiert $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ einen positiv orientierten *Kreisbogen*. Wenn $b = a + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist, so wird der Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ genau k–mal durchgelaufen.

Wir schreiben $\partial B_r(z_0)$ für den positiv orientierten Kreis $\gamma : [a, a + 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Kurven sind Abbidungen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, der Träger $|\gamma|$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Man muss zwischen Kurve und Träger unterscheiden. Zum Beispiel haben $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = z_0 + re^{it}$, $\gamma_2(t) = z_0 + re^{ikt}$ denselben Träger (der Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$) aber $\gamma_1 \neq \gamma_2$ falls $k \neq 1$. Bei γ_1 wird der Kreis einmal durchgelaufen, bei γ_2 wird der Kreis k–mal durchgelaufen.

2.2.3. **Definition.** Für $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, $f = u + iv$, setze

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b f dt := \int_a^b u(t)\,dt + i \int_a^b v(t)\,dt$$

2.2.4. **Lemma.** *Für $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig gilt:*

(i)

$$\int_a^b (f+g)\,dt := \int_a^b f dt + \int_a^b g dt, \; \int_a^b (\lambda f)\,dt = \lambda \int_a^b f dt, \; \lambda \in \mathbb{C},$$

(ii)

$$\Big| \int_a^b f dt \Big| \leq \int_a^b |f| dt \leq \sup_{[a,b]} |f| \cdot (b-a)$$

(iii) *Sei $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $F'(t) = \frac{dF}{dt}(t) = f(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f dt = F(b) - F(a).$$

(iv) $f_n \to f$ *gleichmäßig in* $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f_n dt \to \int_a^b f dt \;\; {\scriptstyle (n \to \infty)}$.

Beweis:

Zu (ii): Sei $z := \int_a^b f dt$. Ist $z = 0$, so ist (ii) klar. Falls $z \neq 0$, schreibe $z = |z| e^{i\varphi}$, also

$$|z| = ze^{-i\varphi} = \int_a^b fe^{-i\varphi} dt = Re \int_a^b fe^{-i\varphi} dt = \int_a^b \underbrace{\mathrm{Re}(fe^{-i\varphi}) dt}_{\leq |fe^{-i\varphi}| = |f|} \leq \int_a^b |f| dt$$

Zu (iii): Hauptsatz für Real- und Imaginärteil.

□

2.2.5. **Definition.** Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein $\mathscr{C}^1$–Kurve, $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig. Das ***Kurvenintegral*** von f längs γ ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_\gamma f dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt. \tag{2.7}$$

Dabei ist die Ableitung von $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ definiert durch $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Das ***Integral nach Bogenlänge*** von f ist definiert durch

$$\int_\gamma f|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Die ***Länge der Kurve*** γ ist

$$\ell(\gamma) := \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Ist γ eine stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve, $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m$ eine Zerlegung in $\mathscr{C}^1$–Kurven, $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig, setze

(2.8) $$\int_\gamma f dz := \int_{\gamma_1} f dz + \ldots + \int_{\gamma_m} f dz\ .$$

Dieser Wert ist von der Zerlegung unabhängig.

Zusammenhang mit reelen Kurvenintegrale: die Formel (2.7) ist eigentlich das Kurvenintegral der 1–Form $f(z)\,dz = (u+iv)(dx+idy) = (u\,dx-v\,dy)+i(v\,dx+u\,dy)$ wie sie in Analysis III eingeführt wurde. Dort ist das Kurvenintegral einer 1-Form $\omega = p\,dx + q\,dy$ längs $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ definiert durch $\int_\gamma \omega := \int_a^b \gamma^\star(\omega)$, wobei $\gamma^\star(\omega) := p(\gamma(t))x'(t)\,dt + q(\gamma(t))y'(t)\,dt$ der Pullback von ω durch γ ist. Es gilt also $\gamma^\star(f\,dz) = f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ und (2.7) lautet $\int_\gamma f\,dz := \int_a^b \gamma^\star(f\,dz)$.

2.2.6. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt ***Stammfunktion*** von f, falls F holomorph ist und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$.

2.2.7. **Lemma.**
(i) Beide Typen von Integralen sind linear, z.B.

$$\int_\gamma (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,dz = \lambda_1 \int_\gamma f_1\,dz + \lambda_2 \int_\gamma f_2\,dz.$$

(ii) Formel (2.8) *gilt auch, wenn* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ *nur stückweise* $\mathscr{C}^1$ *sind.*
(iii) ***Invarianz gegenüber Parametertransformationen:*** *Sei* $\tau : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *bijektiv und stetig differenzierbar, so dass* $\tau'(s) \neq 0$ *für alle* $s \in [\alpha, \beta]$ *(Parametertransformation) und sei* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *eine* $\mathscr{C}^1$*–Kurve. Dann gilt:*

$$\int_{\gamma\circ\tau} f\,dz = \int_\gamma \operatorname{sgn}(\tau') f\,dz\ .$$

Insbesondere

$$\int_{\gamma^{-1}} f\,dz = -\int_\gamma f\,dz\ .$$

Beweis: Zu (iii):

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\tau} f dz &= \int_\alpha^\beta (f\circ\gamma\circ\tau)(s)\cdot(\gamma\circ\tau)'(s)\,ds\\ &= \int_\alpha^\beta (f\circ\gamma)\underbrace{(\tau(s))}_{t}\gamma'\underbrace{(\tau(s))}_{t}\underbrace{\tau'(s)\,ds}_{dt} \underset{\tau(s)=t}{=} \int_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} (f\circ\gamma)(t)\cdot\gamma'(t)dt\\ &= \operatorname{sgn}(\tau')\int_a^b (f\circ\gamma)(t)\gamma'(t)\,dt = \operatorname{sgn}(\tau')\int_\gamma f dz\end{aligned}$$

$$\text{weil } \int_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} = \begin{cases}\int_a^b & \text{falls } \tau \text{ wachsend d.h. } \tau'>0\\ \int_b^a = -\int_a^b & \text{falls } \tau \text{ fallend d.h. } \tau'<0\,.\end{cases}$$

□

2.2.8. **Satz (Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Kurvenintegral).** *Ist f stetig in $D, F: D\to\mathbb{C}$ Stammfunktion von f, so gilt*

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))} \tag{2.9}$$

Insbesondere gilt für jede geschlossene stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.}$$

Hat eine stetige Funktion $f: D\to\mathbb{C}$ eine Stammfunktion, so hängt das Kurvenintegral von $f(z)\,dz$ nur von Anfangs– und Endpunkt der Kurve und nicht vom Verlauf der Kurve ab, d.h. sind $\gamma_1,\gamma_2:[a,b]\to D$ stückweise $\mathscr{C}^1$– Kurven mit $\gamma_1(a)=\gamma_2(a)$, $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$, so gilt

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

Diese Eigenschaft heißt ***Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals von*** *$f dz$.*

Beweis:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{dF}{dz}(\gamma(t))\cdot\frac{d\gamma}{dt}(t)\,dt\\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t)\,dt = F(\gamma(b) - F(\gamma(b))\end{aligned}$$

nach 2.2.4. □

2.2.9. **Satz (Standardabschätzung für Integrale).** *Sei f stetig auf dem Träger der stückweisen $\mathscr{C}^1$–Kurve γ. Dann gilt:*

$$\boxed{\Big|\int_\gamma f dz\Big| \le \int_\gamma |f||dz| \le \sup_{|\gamma|}|f|\cdot\ell(\gamma).} \tag{2.10}$$

Beweis:

$$\Big|\int_\gamma f dz\Big| = \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\Big| \le \underbrace{\int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt}_{=:\int_\gamma |f|\,|dz|}$$

$$\le \sup_{t\in[a,b]} |f\circ\gamma(t)| \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

$$= \sup_{z\in|\gamma|} |f(z)|\,\ell(\gamma)$$

□

2.2.10. **Satz (Schankensatz).** *Sei $f \in \mathscr{O}(D)$ und $z, w \in D$ mit $[z, w] \subset D$. Dann gilt:*

$$\big|f(z) - f(w)\big| \le \|f'\|_{[z,w]}\,|z - w|.$$

Ist $K \subset D$ eine konvexe Menge, so gilt:

$$\big|f(z) - f(w)\big| \le \|f'\|_K |z - w|\,, \text{ für alle } z, w \in K.$$

Beweis: Nach (2.9) gilt

$$f(z) - f(w) = \int_{[z,w]} f'(z)dz\,,$$

und wir wenden die Standardabschätzung für Integrale (2.10). □

2.2.11. **Satz** (Hauptsatz über Kurvenintegrale). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:*

(i) *f besitzt eine Stammfunktion,*
(ii) *$\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jede geschlossene stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve,*
(iii) *das Kurvenintegral von $f dz$ ist wegunabhängig.*

Zusatz. *Ist das der Fall, so ist eine Stammfunktion durch*

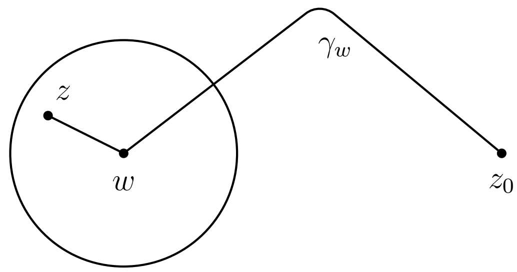
$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta =: \int_{z_0}^z f(\zeta)\,d\zeta$$

gegeben, wobei z_0 beliebig und fest ist und γ_z eine beliebige stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve von z_0 nach z in D ist. (z.B. ein Streckenzug; existiert stets, da D ein Gebiet ist).

Beweis: (i)⇒(ii) folgt aus Lemma 2.2.7(iv).
(ii)⇒(iii) Seien γ, δ Kurven mit demselben Anfangs- und Endpunkt. Dann ist $\gamma * \delta^{-1}$ geschlossen und

$$0 = \int_{\gamma*\delta^{-1}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\delta^{-1}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\delta f(z)\,dz\,.$$

(iii)⇒(i) Sei $w \in D$ beliebig, fest. D offen ⇒ $\exists\, \rho > 0 : B_\rho(w) \subset D$.
Sei γ_w ein Streckenzug von z_0 nach w in D. Dann ist $\gamma_w * [w, z]$ ein Streckenzug von z_0 nach z in D für alle $z \in B_\rho(w)$.



Es folgt

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_w * [w,z]} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int_{\gamma_w} f(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{[w,z]} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= F(w) + f(w)(z-w) + \int\limits_{[w,z]} (f(\zeta) - f(w))\,d\zeta\,, \text{ da } \int\limits_{[w,z]} d\zeta = z - w\,. \end{aligned}$$

f stetig in $w \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta \in (0, \varrho)\ \forall z \in B_\delta(w) : |f(z) - f(w)| < \varepsilon$.
Wegen der Standardabschätung 2.2.7(v) gilt:

$$\Big| \int_{[w,z]} (f(\zeta) - f(w))\,d\zeta \Big| \leq \varepsilon \int_{[w,z]} |d\zeta| = \varepsilon |z - w|$$

und daher

$$\lim_{z \to \infty} \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = f(w)$$

also ist F komplex-differenzierbar in w und $F'(w) = f(w)$. $\square$

6. VORLESUNG, 10.05.2017

2.2.12. **Beispiel.** Die Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z}$ hat keine Stammfuntkion, da

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i\,. \tag{2.11}$$

Hätte f eine Stammfunktion, so wäre das Integral Null. ↯
Die Formel (2.11) folgt aus der Definition des Integrals:

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = 2\pi i\,.$$

Die Funktion f hat aber eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\zeta} : r \geq 0\}$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$, nämlich Zweige des Logarithmus. Das Integral (2.11) hängt eng mit der Unstetigkeit des Logarithmus zusammen. Wir können nämlich mit Hilfe der Stammfunktion $\log$ rechnen

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{e^{i(-\pi+\varepsilon)}}^{e^{i(\pi-\varepsilon)}} \frac{dz}{z} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\big(\log e^{i(\pi-\varepsilon)} - \log e^{i(-\pi+\varepsilon)}\big)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\big(i(\pi-\varepsilon) - i(-\pi+\varepsilon)\big)\\ &= 2\pi i\,.\end{aligned}$$

Das Integral ist also genau der Sprung des Logarithmus beim Überqueren des negativen reellen Achse.

2.2.13. **Definition.** Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt ***Sterngebiet***, wenn es $z_0 \in D$ gibt, so dass für alle $z \in D$ gilt $[z_0, z] \subset D$.
Wir sagen, dass D Sterngebiet bzgl. z_0 ist oder z_0 ein Zentrum von D ist.

(i) Jede komplexe offene Menge ist Sterngebiet. Dabei ist jeder Punkt der Menge ein Zentrum.
(ii) $\mathbb{C}_-$ ist Sterngebiet (aber nicht konvex). Die Zentren von $\mathbb{C}_-$ sind alle $z \in \mathbb{R}_+$.
(iii) $\mathbb{C}^*$ oder ein Kreisring sind nicht Sterngebiete.

2.2.14. **Satz** (Hauptsatz über Kurvenintegrale in Sterngebieten). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet bzgl. $z_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Äquivalent:*

(i) *f besitzt eine Stammfunktion,*
(ii) *$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für den Rand $\partial\Delta$ jedes Dreiecks $\Delta \subset D$ mit z_0 als Ecke.*
(iii) *Das Kurvenintegral von $f dz$ ist wegunabhängig. Ist das der Fall, so ist eine Stammfunktion durch*

$$F : D \to \mathbb{C}\,, \qquad F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

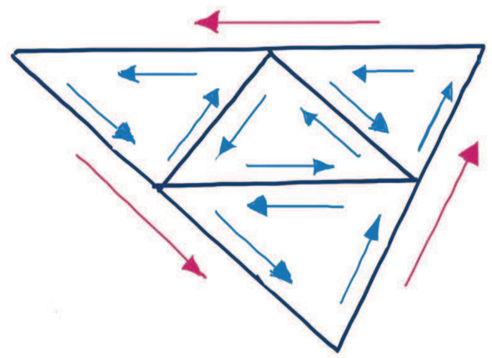
gegeben.

Beweis: Analog zu 2.2.11. In (iii)⇒(ii) setze $\gamma = [z_0, z]$. □

2.3. **Der Cauchysche Integralsatz.** Unser Ziel ist zu zeigen, dass eine holomorphe Funktion f in einem Sterngebiet die Beziehung $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ erfüllt, für alle geschlossenen stückweisen $\mathscr{C}^1$–Kurven. Insbesondere besitzt f Stammfunktionen.

2.3.1. **Lemma** (von Goursat). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in D. Dann gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für den Rand $\partial\Delta$ jedes abgeschlossenen Dreiecks $\Delta \subset D$.*

Beweis: Hier betrachten wir auf dem Rand eines Dreiecks stets die Orientierung gegen den Uhrzeigersinn. Sei $\Delta \subset D$ ein Dreieck. Setze $\alpha := |\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz|$. Seien $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$ die vier Teildreiecke die aus Δ durch Seitenhalbierung hervorgehen.



Dann ist

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^{(j)}} f\,dz\,.$$

(Die Integrale über gemeinsame Seiten heben sich wegen der umgekehrten Orientierung auf.) Sei Δ_1 dasjenige der Dreiecke $\Delta^{(j)}$, für das der Betrag des Integrals maximal wird. Daraus folgt

$$\alpha \leqslant 4 \cdot \Big| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz \Big|\,.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Teilungsprozesses erhalten wir Dreiecke

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \quad \text{mit} \quad \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \qquad (*)$$

und $\alpha \leqslant 4^n |\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz|$, $\ell(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}\,\ell(\partial\Delta)$, $\operatorname{diam}\Delta_n = 2^{-n}\operatorname{diam}\Delta, n \in \mathbb{N}$. Die Mengen Δ_n sind kompakt. Aus $(*) \Rightarrow \exists\, z_0 \in D$ mit $z_0 \in \bigcap_{n\geq 1} \Delta_n$. f ist in z_0 komplex-differenzierbar, daher gibt es $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$ und

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varphi(z)(z - z_0)\,.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|\varphi(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in B_\delta(z_0)$. Da $\partial\Delta_n$ geschlossen sind, gilt:

$$\int_{\partial\Delta_n} dz = 0 \quad , \quad \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)\, dz = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz &= f(z_0) \int_{\partial\Delta_n} dz + f'(z_0) \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)\, dz + \int_{\partial\Delta_n} \varphi(z)(z - z_0)\, dz \\
&= \int_{\partial\Delta_n} \varphi(z)(z - z_0)\, dz
\end{aligned}$$

Wegen $z_0 \in \Delta_n, \operatorname{diam} \Delta_n \to 0$ gilt $\Delta_n \subset B_\delta(z_0)$ für großes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\alpha &\leqslant 4^n \cdot \Big| \int_{\partial\Delta_n} \varphi(z)(z - z_0)\, dz \Big| \leqslant 4^n \cdot \varepsilon \cdot \sup_{z \in \Delta_n} |z - z_0| \cdot \ell(\partial\Delta_n) \\
&= 4^n \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{diam} \Delta_n\, \ell(\partial\Delta_n) = 4^n \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{diam} \Delta \frac{1}{2^n} \cdot \ell(\partial\Delta_n) \\
&= \varepsilon \cdot \operatorname{diam} \Delta \cdot \ell(\partial\Delta)
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\alpha = 0$. $\square$

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Diameter einer Teilmenge $A \subset X$ ist definiert durch $\operatorname{diam} A := \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}$. Für ein Dreieck in der Ebene ist der Diameter gleich die Länge der längsten Seite.

Satz. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und K_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge nichtleerer kompakter Mengen, so dass $K_{n+1} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.*

Zum Beweis: Sei $z_n \in K_n$ beliebig gewählt. Die Folge $(z_n)_{n \geqslant 1}$ gehört zur kompakten Menge K_1. Wegen Folgenkompaktheit von K_1, hat $(z_n)_{n \geqslant 1}$ einen Häufungspunkt $z_0 \in K_1$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist dann z_0 einen Häufungspunkt der Folge $(z_n)_{n \geqslant m}$ in K_m. Da K_m abgeschlossen ist, so gilt $z_0 \in K_m$, also $z_0 \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m$.

7. Vorlesung, 15.05.2017

2.3.2. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossenen stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurven in D. Insbesondere besitzt f eine Stammfunktion in D.*

Beweis: Folgt aus Lemma von Goursat 2.3.1 und Hauptsatz über Kurvenintegrale in Sterngebieten 2.2.14. $\square$

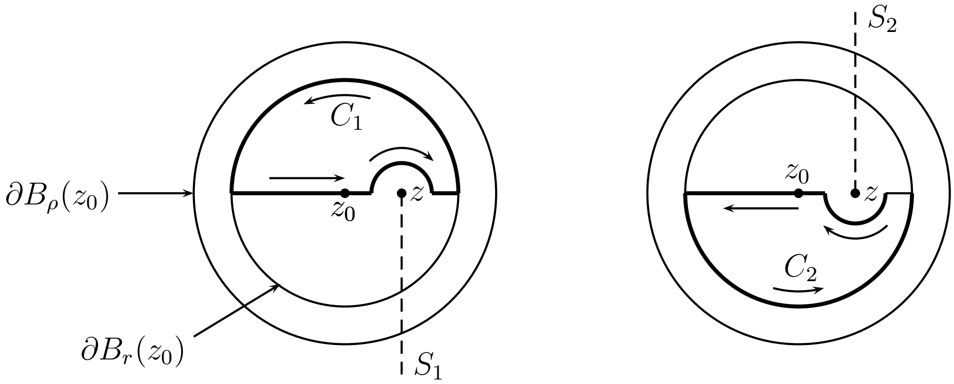
2.3.3. **Satz** (Cauchysche Integralformel). *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in der offenen Menge D. Wenn*

$$\overline{B_r(z_0)} \subset D \tag{2.12}$$

ist, so gilt :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,, \quad \text{für } z \in B_r(z_0)} \tag{2.13}$$

Beweis: Sei $z \in B_r(z_0)$ gegeben. Wegen (2.12) gibt es $\rho > r$ mit $B_\rho(z_0) \subset D$. Sei C_1 die durch Pfeile



angeordnete Kurve, wo der kleine Halbkreis um z den genügend kleinen Radius $\delta > 0$ hat. Entsprechend ist C_2 konstruiert durch Spiegelung um $\overline{z_0 z}$.
Sind S_1, S_2 senkrechte Halbgeraden zu $\overline{z_0 z}$ durch z, so sind $H_j = B_\rho(z_0) \setminus S_j$ Sterngebiete ($j = 1, 2$). Die Funktionen $H_j \ni \zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ sind holomorph und $\int_{C_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0$, $j = 1, 2$, nach 2.3.2 Wir addieren beide Integrale und dabei zerlegen wir sie in Strecken- und Halbkreisintegrale. Die Anteile über die Strecken heben sich wegen der verschiedenen Orientierungen auf:

$$0 = \int\limits_{C_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{C_2} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\,,$$

$$\int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} := \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z+\delta e^{it})}{\delta e^{it}} i\delta e^{it} dt = i\int_0^{2\pi} f(z+\delta e^{it})dt$$

$$= \underbrace{i\int\limits_0^{2\pi} [f(z+\delta e^{it}) - f(z)]\, dt}_{\to 0\ (\delta \to 0)} + \underbrace{i\int\limits_0^{2\pi} f(z)dt}_{=2\pi i f(z)} ,$$

weil

$$\Big| \int_0^{2\pi} [f(z+\delta e^{it}) - f(z)]dt \Big| \le \max_{t\in[0,2\pi]} |f(z+\delta e^{it}) - f(z)| \cdot 2\pi \longrightarrow 0 \,, \quad \delta \to 0 \,.$$

□

2.3.4. **Definition.** Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Die *Windungszahl (Umlaufzahl)* ist

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

und gibt an, wie oft die Kurve γ den Punkt z im positiven Sinn umläuft.

Als Beispiel betrachte

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,,\ \gamma(t) = e^{ikt}\,,\ k \in \mathbb{Z} \quad \rightsquigarrow \quad n(\gamma, 0) = k \,.$$

2.3.5. **Satz.** *Es gilt* $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Zerlege $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_m = b$, so dass $\gamma_k := \gamma|_{[c_{k-1}, c_k]} : [c_{k-1}, c_k] \to U_k$, wobei ein Zweig des Logarithmus $\ell_k : U_k \to \mathbb{C}$ auf U_k existiert. Dann gilt $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m$ und

$$2\pi i \cdot n(\gamma, z) = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^m [\ell_k(\gamma(c_k)) - \ell_k(\gamma(c_{k-1}))]$$

$$= \underbrace{\ell_m(\gamma(c_m)) - \ell_1(\gamma(c_0))}_{\in 2\pi i\mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{m-1} \underbrace{[\ell_k(\gamma(c_k)) - \ell_{k+1}(\gamma(c_k))]}_{\in 2\pi i\mathbb{Z}} ,$$

da für zwei Zweige ℓ_1, ℓ_2 des Logarithmus gilt $\ell_1(z), \ell_2(z) \in \log|z| + i\arg z + 2\pi i\mathbb{Z}$.

□

Der Beweis zeigt, dass $2\pi i \cdot n(\gamma, z)$ die Gesamtänderung des Argumentes längs der Kurve γ ist und $n(\gamma, z)$ gibt in der Tat an, wie oft $\gamma(t)$ insgesamt um den Punkt z umläuft, wenn t das Definitionsintervall von γ durchläuft. Dabei werden Umläufe in Uhrzeigersinn negativ, im Gegenuhrzeigersinn positiv gerechnet.

2.3.6. **Satz** (allgemeine Cauchy-Formel). *Sei D ein Sterngebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine geschlossene stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve und $z \in D \setminus |\gamma|$. Dann gilt:*

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Beweis: Schreibe

$$(*)\qquad \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} \;.$$

Nach Definition ist $\int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} = 2\pi i \cdot n(\gamma, z)$. Definiere

$$g_z : D \to \mathbb{C}, \quad g_z(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z \;. \end{cases}$$

g_z ist holomorph in $D \setminus \{z\}$ und stetig in D. Das Lemma von Goursat und der Cauchysche Integralsatz sind noch gültig (siehe Übungsblatt 4, 1a). Also

$$\int_\gamma g_z(\zeta) d\zeta = 0$$

und das erste Integral in $(*)$ verschwindet. □

Für $\gamma = \partial B_r(z_0)$ gilt

$$n(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & , \quad z \in B_r(z_0) \\ 0 & , \quad z \notin \overline{B_r(z_0)} \;, \end{cases}$$

also

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in B_r(z_0) \\ 0 & , \quad z \notin \overline{B_r(z_0)} \;. \end{cases}$$

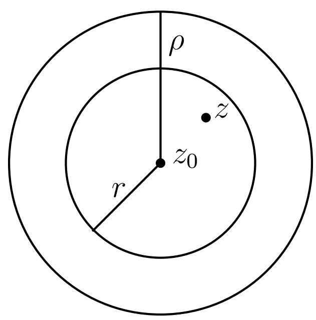
2.3.7. **Satz** (Potenzreihenentwicklungssatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in D$ und $\rho = d(z_0, \partial D) := \inf\limits_{z \in \partial D} |z - z_0| > 0$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{für alle } z \in B_\rho(z_0) \;,$$

wobei

$$(2.14)\qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \textit{für alle } r \in (0, \rho) \;.$$

Beweis: Sei $z \in B_\rho(z_0)$. Wähle $r \in (|z - z_0|, \rho)$.



Dann ist $\overline{B_r(z_0)} \subset B_\rho(z_0)$ und die Cauchysche Integralformel impliziert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \, .$$

Nun ist

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}$$

und $|z - z_0| < r = |\zeta - z_0|$, also $\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1$. Somit gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \, .$$

Diese Funktionenreihe konvergiert normal und daher gleichmäßig für $\zeta \in \partial B_r(z_0)$, da

$$\sup_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{r}\right)^n < \infty \, .$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \cdot (z - z_0)^n \, . \end{aligned}$$

(Wir können Integral und Summe vertauschen wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe.) $\square$

8. VORLESUNG, 22.05.2017

2.3.8. **Folgerung.** *Sei D offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

(i) *f ist beliebig oft komplex–differenzierbar, d.h. man kann induktiv definieren $f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, durch $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Insbesondere sind alle Ableitungen $f^{(n)}$ holomorph.*

(ii) *Es gilt*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

für alle $r \in (0, d(z, \partial D))$. (Cauchy–Formel für Ableitungen)

(iii) *f ist um jedes $z_0 \in D$ in eine Taylorreihe entwickelbar:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in B_{d(z_0, \partial D)}(z_0)\ .$$

Beweis: Nach 2.3.7 gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, mit a_n aus (2.14). Aus Beispiel 2.1.7(iv) wissen wir, dass eine Potenzreihe gliedweise differenziert werden darf, also

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Dasselbe Argument induktiv angewendet zeigt, dass f unendlich oft komplex–differenzierbar ist und

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n}$$

für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Für $z = z_0$ folgt $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$, also $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

2.3.9. **Bemerkung.**

(i) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt um den Punkt $z_0 \in D$ in eine *Potenzreihe entwickelbar*, falls es $\rho > 0$ gibt und eine Potenzreihe $\sum\limits_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$, so dass $B_\rho(z_0) \subset D$ und $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Die Funktion f heißt *analytisch*, falls sie um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Wir haben eben gezeigt:
f analytisch $\iff$ f holomorph.

(ii) Die Reihe in (i) ist durch f eindeutig bestimmt, da $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Ist f analytisch, so wird f durch seine Taylorreihe dargestellt.

(iii) Der Konvergenzradius der Taylorreihe von f kann echt grösser sein als der Abstand $d(z_0, \partial D)$ des Entwicklungspunktes zum Rand. Für den Hauptzweig $\log : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ hat die Taylorreihe in $z_0 \in \mathbb{C}_-$, $\operatorname{Re} z_0 < 0$, die Form

$$\log(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n$$

mit Konvergenzradius $|z_0| > |\operatorname{Im} z_0| = d(z_0, \partial\mathbb{C}_-)$.

Der Satz von Morera is eine Umkehrung des Lemmas von Goursat und stellt ein wichtiges Holomorphiekriterium dar.

2.3.10. **Satz** (Morera). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset D$ gelte*

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \qquad \textit{(Morera–Bedingung).}$$

Dann ist f holomorph.

Beweis: Sei $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset D$. $B_r(z_0)$ ist ein Sterngebiet und der Hauptsatz über Kurvenintegrale für Sterngebiete behauptet, dass f eine Stammfunktion $F : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ besitzt. F ist holomorph, also ist nach 2.3.8 auch $F' = f$ holomorph. □

2.3.11. **Satz** (Zusammenfassung zum Holomorphiebegriff). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist auf D holomorph, d.h. in jedem Punkt $z \in D$ komplex–differenzierbar.*

(ii) *f ist in jedem Punkt $z \in D$ reell–differenzierbar und erfüllt die Cauchy–Riemannschen Gleichungen $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.*

(iii) *f ist stetig und für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset D$ gilt die Morera–Bedingung $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.*

(iv) *f ist stetig und besitzt lokal eine Stammfunktion, d.h. zu jedem $z \in D$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset D$, so dass $f|_U$ eine Stammfunktion hat.*

(v) *f ist stetig und für jede Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad \textit{für } z \in B_r(z_0)\ .$$

(vi) *f ist analytisch in D.*

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{(ii)} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Satz 2.1.2}"] & \\
 & & \text{(i)} \arrow[dl, Rightarrow, shift left, "\text{Morera}"] & \\
\text{(iv)} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{2.1.12}"] & \text{(iii)} \arrow[ur, Rightarrow, shift left, "\text{Goursat}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{Cauchyformel}"'] & & \text{(vi)} \arrow[ul, Rightarrow, "\text{Bsp. 2.1.6 (iv)}"'] \\
 & & \text{(v)} \arrow[ur, Rightarrow, "\text{Potenzreihenentwickungssatz}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Bemerkung. (i) Die Aussage "f holomorph $\Rightarrow f$ analytisch" zeigt deutlich, wie stark sich reelle und komplexe Differenzierbarkeit unterscheiden: Im Reellen ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion i.A. nicht einmal stetig, z.B. für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, ist f' in $x = 0$ unstetig. Auch wenn $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, muss f nicht analytisch sein, z.B. für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n und die Taylorreihe stimmt nicht mit f überein.
(ii) Für den Aufbau der Funktionentheorie haben wir nur die Existenz der Ableitung und nicht deren Stetigkeit benötigt. Wenn man in der Definition der Holomorphie die Stetigkeit der Ableitung voraussetzt, kann man den Cauchyschen Integralsatz leicht mit Hilfe des Satzes von Gauß–Green (oder Stokes) herleiten: Ist $\gamma = \partial\Omega$ der positiv orientierte Rand eines stückweise glatt berandeten Gebiets Ω und f holomorph in einer Umgebung von Ω, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial\Omega} f(z)\,dz \overset{\text{Stokes}}{=} \int_\Omega \underbrace{d(f(z)\,dz)}_{=0\,,\ \text{da } f \text{ holomorph}} = 0\ .$$

2.4. **Identitätssatz, Nullstellen und holomorphe Fortsetzung.**

Bezeichnung: Für $D \subset \mathbb{C}$ offen setzen wir

$$\mathscr{O}(D) := \left\{ f : D \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ holomorph} \right\}.$$

2.4.1. **Satz** (Identitätssatz)**.** *Sei D Gebiet, $f \in \mathscr{O}(D)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $f \equiv 0$ *auf* D.
(ii) *Es gibt eine offene Teilmenge $U \subset D$, so dass $f|_U \equiv 0$.*
(iii) *Die Menge $\{z \in D : f(z) = 0\}$ hat einen Häufungspunkt in D.*
(iv) $\exists\, z_0 \in D$ *mit* $f^{(n)}(z_0) = 0$ ***für alle*** $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) klar. Zu (iii)$\Rightarrow$(iv):
Sei $z_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Dann gilt $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$, $z \in B_\rho(z_0)$, mit $\rho = d(z_0, \partial D)$ und $\exists\, z_k \neq z_0$, $z_k \to z_0$ mit $f(z_k) = 0$. Übungsblatt 4, Aufgabe 1(b) $\Rightarrow a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Aber $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!\,$.
(iv)$\Rightarrow$(i): Betrachte

$$Z = \{z \in D : f^{(n)}(z) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \{z \in D : f^{(n)}(z) = 0\}\ .$$

$f^{(n)}$ stetig $\Rightarrow$ $\{z \in D : f^{(n)}(z) = 0\}$ abgeschlossen $\Rightarrow$ Z abgeschlossen (Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen).
Sei $w \in Z$. Dann folgt $f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z - w)^n = 0$ auf $B_\rho(w)$ mit $\rho = d(w, \partial D)$ $\Rightarrow$ $B_\rho(w) \subset Z$ $\Rightarrow$ Z offen. Zudem $z_0 \in Z \neq \emptyset$, also $D = Z$, da D zusammenhängend ist. $\square$

Häufig benutzt man den Satz für $h - g$ anstelle f, wobei $h, g \in \mathscr{O}(D)$.

9. VORLESUNG, 24.05.2017

Für die Gültigkeit des Identitätssatzes ist der Zusammenhang von D, der beim Beweis der Implikation (iv) $\Rightarrow$ (i) benutzt wird, wesentlich: ist z. B. D die Vereinigung zweier disjunkter Kreisseheiben B_0, B_1 und setzt man $f(z) := 0$ für $z \in B_0$, $f(z) := 1$ für $z \in B_1$, so ist f holomorph in D, sie hat die Eigenschaften (ii), (iii) und (iv) aber es gilt $f \not\equiv 0$ in D.

2.4.2. **Folgerung** (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung). *Sei D ein Gebiet, $A \subset D$ eine beliebige Teilmenge, $A \neq \emptyset$, mit mindestens einem Häufungspunkt in D. Sei $f : A \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es höchstens eine holomorphe Fortsetzung $F : D \to \mathbb{C}$ von f, d.h. $F \in \mathscr{O}(D)$ mit $F|_A = f$.*

Beweis: Angenommen es gibt $F_1, F_2 \in \mathscr{O}(D)$, $F_1|_A = F_2|_A$. Mit 2.4.1(iii) für $F_1 - F_2$ folgt $F_1 \equiv F_2$ in D. $\square$

2.4.3. **Satz.** *Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Dann gilt: $f : I \to \mathbb{R}$ ist analytisch $\iff$ f besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$.*

Beweis: "$\Rightarrow$":
f reell–analytisch $:\iff$ $\forall\, x \in I\ \exists \varepsilon(x) > 0$, so dass $\big(x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)\big) \subset I$ und $f(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x)(y - x)^n$ für alle $y \in \big(x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)\big)$, wobei $c_n(x) = f^{(n)}(x)/n!$. Die Potenzreihe hat Konvergenzradius $R = 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n(x)|}$. Daher hat die komplexe Potenzreihe $\sum\limits_{n\geq 0} c_n(x)(z - x)^n$ Konvergenzradius $R \geq \varepsilon(x)$. Definiere

$$F_x : B_{\varepsilon(x)}(x) \to \mathbb{C} \quad , \quad F_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)(z - x)^n \ .$$

Setze $D := \bigcup\limits_{x\in I} B_{\varepsilon(x)}(x)$; D ist ein Gebiet. (Beweis?)
Auf dem Durchschnitt zweier Kreisscheiben $B_{\varepsilon(x_1)}(x_1)$ und $B_{\varepsilon(x_2)}(x_2)$ stimmen F_{x_1}, F_{x_2} überein, da sie auf $B_{\varepsilon(x_1)}(x_1) \cap B_{\varepsilon(x_2)}(x_2) \cap I$ mit f übereinstimmen. Damit ist $F : D \to \mathbb{C}$, $F(z) = F_x(z)$ für $z \in B_{\varepsilon(x)}(x)$, eine holomorphe Fortsetzung von f. $\square$

Die holomorphe Fortsetzung definieren wir durch Einsetzen der komplexen Variable z in der Potenzreihendarstellung von f. Z. B. ist die holomorphe Fortsetzung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$, die Funktion

$$F : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}, \quad F(z) = (1 + z^2)^{-1}.$$

Die Existenz der imaginären Nullstellen von $z^2 + 1 = 0$ erklärt auch, wieso die Entwicklung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$ um 0 nur für $|x| < 1$, jedoch nicht für $|x| \geq 1$ gültig ist: Auf dem Konvergenzkreis $|z| = 1$ von $\sum_{n\geq 0}(-z^2)^n$ liegen die singulären Punkte von $(1 + z^2)^{-1}$.

Auch den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = (1 + x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ kann man leicht berenchnen, indem man der Potenzreihenentwicklungssatz für die *komplexe* Reihe $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x_0)^n$ anwendet. Der Konvergenzradius ist nämlich der Abstand von x_0 zum Rand von $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, d. h. zum $\{\pm i\}$. Das ist $|x_0 - i| = \sqrt{x_0^2 + 1}$.

2.4.4. **Definition.** Ist $A \subset X$, wobei X ein topologischer Raum ist, so heißt ein Punkt $p \in A$ *isolierter Punkt*, wenn es eine Umgebung U von p gibt mit $U \cap A = \{p\}$. Die Menge A heißt *diskret*, wenn alle Punkte von A isolierte Punkte von A sind.

Es gilt:
A diskret $\iff$ A enthält keinen Häufungspunkt von A.
A diskret und abgeschlossen $\iff$ A hat keinen Häufungspunkt.

Als Beispiel, die Menge $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist diskret aber nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Der einzige Häufungspunkt von A in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist 0 und 0 gehört nicht zu A. Hingegen ist $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ diskret und abgeschlossen in $\mathbb{R}_+$ oder $\{\operatorname{Re} z > 0\}$.

2.4.5. **Satz** (Isoliertheit der Nullstellen). *Sei D ein Gebiet, $f \in \mathscr{O}(D)$, $f \not\equiv 0$. Dann ist die Menge der Nullstellen $N_f = \{z \in D : f(z) = 0\}$ diskret und abgeschlossen.*

Beweis: Wäre N_f nicht diskret und abgeschlossen, so hätte N_f einen Häufungspunkt in D. Nach dem Identitätssatz (2.4.1(iii)) wäre $f \equiv 0$ $\lightning$. $\square$

Die Nullstellen *reeller* unendlich oft differenzierbarer Funktionen haben diese Eigenschaft nicht: so ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und und der Nullpunkt ist Häufungspunkt der Nullstellen $\frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Diese Funktion hat übrigens die Eigenschaft, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, aber f is nicht identisch Null.

Die Nullstellen holomorpher Funktionen $f \in \mathscr{O}(D)$ können sich sehr wohl gegen den Rand von D häufen. So hat etwa die Funktion $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$,

$$f(z) = \sin \frac{z+1}{z-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},$$

die Nullstellenmenge $\{\frac{n\pi+1}{n\pi-1} : n \in \mathbb{Z}\}$ mit Häufungspunkt 1.

Wenn man den Satz 2.4.5 auf die Funktion $f - c$ anwendet, wobei $c \in \mathbb{C}$ ist, erhält man die folgende Aussage über die Diskretheit der Faser.

Es sei D eine Gebiet und $f \in \mathscr{O}(D)$ nicht konstant. Dann ist für jede Zahl $c \in \mathbb{C}$ die Menge $f^{-1}(c)$ der c-Stellen von f diskret und abgeschlossen in D (evtl. leer). Insbesondere ist fur jedes Kompaktum $K \subset D$ die Menge $f^{-1}(c) \cap K$ endlich, speziell hat f höchstens abzählbar unendlich viele c-Stellen in D.

In der Tat, wäre $f^{-1}(c) \cap K$ unendlich, so gäbe es eine Folge von paarweise verschiedenen Punkten in $f^{-1}(c) \cap K$. Solche Folge hätte, da $f^{-1}(c) \cap K$ kompakt ist, einen Häufungspunkt in $f^{-1}(c) \cap K$, was unmoglich ist, da alle Punkte von $f^{-1}(c)$ isoliert liegen. Da jeder Bereich in $\mathbb{C}$ die Vereinigung abzählbar vieler Kompakta ist, so folgt weiter, dass $f^{-1}(c)$ abzählbar ist.

2.5. **Cauchysche Abschätzungen, Satz von Liouville, Fundamentalsatz der Algebra.** Aus der Cauchy-Formel kann man mittels Standardabschätzung für Wegintegrale die folgenden nützlichen Abschätzungen für die Koeffizienten der Reihenentwicklung in einem Punkt herleiten. Es ist wichtig, dass die Koeffizienten durch die Supremumsnorm der Funktion abschätzen lassen.

2.5.1. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$, $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ und*

$$M(r) = \sup_{\partial B_r(z_0)} |f|.$$

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f um z_0. Dann gilt:

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Beweis: Der Potenzreihenentwicklungssatz 2.3.7 impliziert:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$$

Mit der Standardabschätzung (2.2.7 (v)) folgt

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} \frac{|f(\zeta)|}{\underbrace{|(\zeta - z_0)^{n+1}|}_{=r^{n+1}}} \underbrace{\ell(\partial B_r(z_0))}_{=2\pi r} = \frac{M(r)}{r^n}.$$

□

2.5.2. **Definition** (Weierstrass). Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ heißt ***ganze Funktion***. Eine ganze Funktion, die kein Polynom ist, heißt *transzendent*.

Beispiele: Polynome, $\exp$, $\sin$, $\cos$.

2.5.3. **Satz (*Satz von Liouville*).** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis: Die Taylorentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ von f um 0 konvergiert *überall* in $\mathbb{C}$ (Satz 2.3.7). Da f beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$, so dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus 2.5.1 folgt $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ für alle $r > 0$. Da r beliebig groß werden kann, folgt $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$, d.h. $f(z) = a_0$. □

Der Satz wurde nicht von Liouville publiziert, sondern von Cauchy (1844). Liouville hat 1847 einen verwandten Satz bewiesen: Eine elliptische ganze Funktion ist konstant.

2.5.4. **Satz** (Fundamentalsatz der Algebra). *Ein nicht konstantes Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis: Ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ ist nicht konstant genau dann, wenn $\operatorname{grad} P \geqslant 1$, d. h. genau dann, wenn $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ mit $n \geqslant 1$ und $a_n \neq 0$. (In der Tat, P ist konstant, genau dann, wenn $P' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$; andererseits ist die n-te Ableitung von $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$, $P^{(n)}(z) = n! a_n$.)

Angenommen $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ holomorph und es gilt

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^n| \cdot \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + a_n\right|} \to 0 \cdot \frac{1}{a_n} = 0\,. \quad |z| \to \infty$$

f ist also beschränkt und konstant nach 2.5.3; folglich ist P konstant $\lightning$. □

Ein Körper K heißt ***algebraisch abgeschlossen***, wenn jedes Polynom $f \in K[x]$ mit Koeffizienten in K und mit $\operatorname{grad} f \geqslant 1$ eine Nullstelle in K besitzt. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass der Körper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht algebraisch abgeschlossen, da z. B. $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ keine Nustelle in $\mathbb{Q}$ hat, und $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat.

Äquivalent sind:

- K ist algebraisch abgeschlossen.
- Jedes $f \in K[X]$, $\operatorname{grad} f \geqslant 1$ zerfällt in Linearfaktoren: $f = c\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$, $n = \operatorname{grad} f$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $c \neq 0$.

Sei K ein Körper, $f \in K[X]$, $\alpha \in K$ Nullstelle $\rightsquigarrow \exists\, q \in K[X]$ mit $f = (X - \alpha)q$ (denn $f = (X - \alpha)q + r$, $\operatorname{grad} r < 1$, also $r \in K$ und $0 = f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r$ $\rightsquigarrow r = 0$). Also ist $X - \alpha$ ein Faktor von f genau dann, wenn α eine Nullstelle von f ist. Dabei haben wir benutzt:

2.5.5. **Satz** (Satz über Division mit Rest). *Sei R ein Ring, seien $f, g \in R[X]$ mit $f = \sum_{i=0}^d a_i X^i$, $a_d \in R^*$ (insbesondere $\operatorname{grad} f = d$). Dann $\exists! q, r \in R[X]$ mit $f = g\,q + r$, $\operatorname{grad} r < d$.*

Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, können wir ein Polynom $f \in K[X]$, $\operatorname{grad} f \geqslant 1$, zerlegen $f = (X - \alpha_1)q$, wobei α_1 eine Nullstelle von f ist und q ein Polynom mit $\operatorname{grad} q = \operatorname{grad} f - 1$ ist. Falls $\operatorname{grad} q \geqslant 1$, gibt es eine Nullstelle α_2 von q und wir verfahren rekursiv um eine Zerlegung $f = c\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ zu erhalten. Manche Nullstellen α_i, $i = 1, \ldots, n$, können gleich sein. Ist α eine Nullstelle von f, so bezeichnen wir die Vielfachheit von α, die Anzahl der Nullstellen α_i, $i = 1, \ldots, n$, die gleich α sind. Das Polynom f hat also genau $\operatorname{grad} f$ Nullstellen in K, gezählt mit Vielfachheit. Die Vielfachheit der Nullstelle α ist auch die Vielfachheit von $X - \alpha$ in der Primfaktorzerlegung $f = c\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ von f.

2.5.6. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$, $K \subset D$ kompakt und $0 < \varepsilon < d\,(K, \partial D)$. Sei $K_\varepsilon = \{z \in D : d\,(z, K) \leq \varepsilon\}$. Dann gilt*

$$\|f^{(n)}\|_K \leq \frac{n!}{\varepsilon^n} \|f\|_{K_\varepsilon}.$$

Beweis: Für $z \in K$ gilt $\overline{B_\varepsilon(z)} \subset K_\varepsilon$, also

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{\varepsilon^n} \|f\|_{K_\varepsilon}.$$

□

10. Vorlesung, 29.05.2017

2.6. **Maximumprinzip, Offenheitssatz, Schwarzsches Lemma.**

2.6.1. **Satz** (***Mittelwertsatz für holomorphe Funktionen***). *Ist f holomorph in einer Umgebung von $\overline{B_r(z_0)}$, so gilt*

$$f(z_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt}_{\text{Mittelwert von } f \text{ auf } |z-z_0|=r} \qquad (*)$$

nach der Cauchy–Formel.

Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ die *Mittelwerteigenschaft* hat, wenn $(*)$ für jede $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ gilt.

2.6.2. **Satz** (***Maximumprinzip***). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Hat $|f|$ ein lokales Maximum in D, so ist f konstant.*

Beweis: Sei $z_0 \in D$ ein lokales Maximum, $\overline{B_R(z_0)} \subset D$ eine Umgebung von z_0 mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für $z \in \overline{B_R(z_0)}$.
Ist $f(z_0) = 0$, so ist $f|_{B_R(z_0)} \equiv 0$ und nach Identitätssatz $f \equiv 0$.
Ist $f(z_0) \neq 0$, so $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\varphi},\ (fe^{-i\varphi})(z_0) = |f(z_0)| > 0$.
Wir ersetzen f durch $fe^{-i\varphi}$ und dürfen annehmen, dass $f(z_0) > 0$. Es gilt also $f(z_0) \geq |f(z)|$ für alle $z \in B_R(z_0)$.
Betrachte nun die Funktion $g : B_R(z_0) \to \mathbb{R},\ g(z) = \mathrm{Re}(f(z_0) - f(z))$.

- Wegen $\mathrm{Re}\, f(z) \leq |f(z)| \leq f(z_0)$ gilt $g \geq 0$, $g(z_0) = 0$.
- Durch Zerlegung in Real- und Imginärteil von $(*)$ folgt, dass auch $\mathrm{Re}\, f$ die Mittelwerteigenschaft hat, also auch g.

Damit

$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it})\,dt\ .$$

Der Integrand ist stetig und $\geq 0 \Rightarrow g(z_0 + re^{it}) = 0$ für alle $t \in [0, 2\pi], 0 < r \leq R \Rightarrow$ $\mathrm{Re}\, f$ konstant in $B_R(z_0)$.
Aber $|f(z)| \leq f(z_0) = \mathrm{Re}\, f(z) \leq |f(z)| \Rightarrow |f(z)| \equiv \mathrm{Re}\, f(z) \Rightarrow \mathrm{Im}\, f(z) = 0 \Rightarrow$ $f(z) = \mathrm{Re}\, f(z) = f(z_0)$ für $z \in B_R(z_0)$.
Identitätssatz $\Rightarrow f(z) = f(z_0)$ für $z \in D$. □

2.6.3. **Bemerkung.** Man kann auch die folgende Form des Maximumprinzips beweisen, die z. B. für harmonische Funktionen andwendbar ist. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und erfüllt die Mittelwerteigenschaft. Hat $|f|$ ein lokales Maximum in D, so ist f konstant.

2.6.4. **Satz** (***Maximumprinzip für beschränkte Gebiete***). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ beschränkt, $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathscr{C}(\overline{D})$. Dann nimmt $|f|$ ihr Maximum auf dem Rand an:*

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\partial D} \text{ für alle } z \in D\ .$$

2.6.5. **Satz** (***Minimumprinzip***). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ und $z_0 \in D$, so dass $|f|$ ein lokales Minimum in z_0 hat.*
Dann gilt $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant in D.

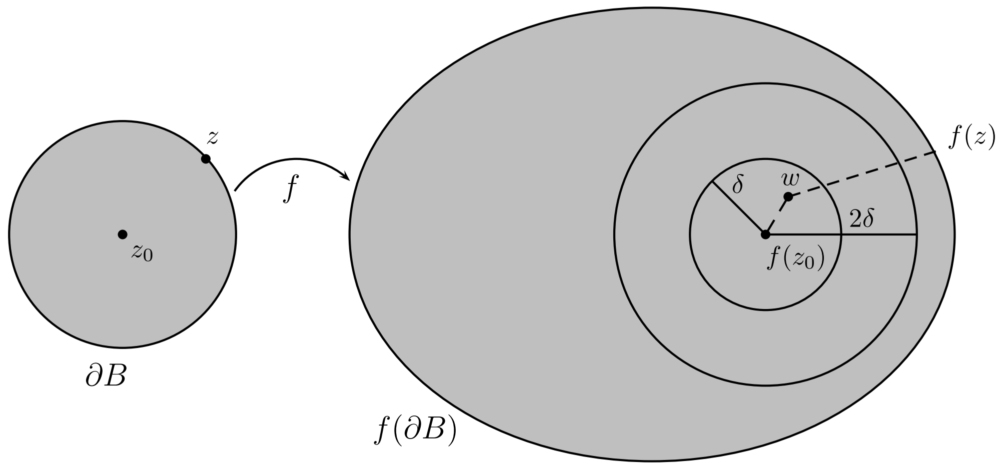
Beweis: Ist $f(z_0) \neq 0$, so $f(z) \neq 0$, $z \in U(z_0)$ und $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}(U)$ und $\frac{1}{|f|}$ hat ein lokales Maximum in z_0; dann ist f konstant in U also in D nach Identitätssatz. □

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *offen*, wenn das Bild $f(U)$ jeder in X offenen Menge U offen in Y ist. Beachte: Im Gegensatz hierzu bedeutet Stetigkeit, dass jede in Y offene Menge V ein offenes Urbild $f^{-1}(V)$ hat. f stetig $\not\Rightarrow$ f offen, z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht offen.
Sei $f : X \to Y$ stetig, bijektiv. Dann gilt: f offen $\iff$ f homöomorph.
$P : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{C}^*$, $P(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ist stetig, bijektiv, aber nicht offen.

2.6.6. **Satz** (***Offenheitssatz***). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$ nirgends lokal konstant. Dann ist die Abbildung $F : D \to \mathbb{C}$ offen.*

Beweis: Sei $U \subset D$ offen und $z_0 \in U$. Z. z. $\exists\, \delta > 0 : B_\delta(f(z_0)) \subset f(U)$. f ist um z_0 nicht-konstant $\Rightarrow$ $\exists\, B = B_r(z_0)$ mit $\overline{B} \subset D$ und $f(z_0) \notin f(\partial B)$ Sonst $\forall r > 0$ $\exists z_r \in \partial B_r(z_0)$ mit $f(z_0) = f(z_r)$. Wähle $r = 1/n$, dann $z_{1/n} \to z_0$, $n \to \infty$ und $f(z_0) = f(z_{1/n})$. Nach Identitätssatz ist dann f konstant in der Zusammenhangskomponente von z_0. Widerspruch.
Sei

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(z_0)|\ .$$



Wir zeigen, dass $B_\delta(f(z_0)) \subset f(B)$. Sei ω mit $|\omega - f(z_0)| < \delta$. Dann

$$2\delta \le |f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - \omega| + |f(z_0) - \omega| < |f(z) - \omega| + \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - \omega| > \delta$$

für alle $z \in \partial B$, also

$$\min_{z \in \partial B} |f(z) - \omega| > \delta > |f(z_0) - \omega|\ .$$

Dies bedeutet, dass die nicht konstante Funktion $\overline{B} \ni z \to |f(z) - \omega|$ ihr Minimum in B erreicht $\rightsquigarrow$ sie hat eine Nullstelle in B, d. h. $\exists \zeta \in B$ mit $f(\zeta) = \omega \Rightarrow$ $B_\delta(f(z_0)) \subset f(B)$. □

Äquivalente Fassung des Offenheitssatzes:

2.6.7. **Satz** (***Satz von der Gebietstreue***). *Sei D ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ nicht konstant. Dann ist $f(D)$ wieder ein Gebiet.*

Beweis: f nicht konstant $\Rightarrow f$ nirgends lokal konstant (nach Identitätssatz). Offenheitssatz $\Rightarrow f(D)$ offen. f stetig $\Rightarrow f(D)$ zusammenhängend. □

Notiz. Mit Hilfe des Offenheitssatzes erhalten wir einen weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (Satz 2.5.4).

Satz. *Sei $P \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom. Dann bildet P abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab. Ist P nicht konstant, dann ist $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ und P hat eine Nullstelle.*

Beweis: Sei P nicht konstant. Dann gilt $P(z_n) \to \infty$ für $z_n \to \infty$. Sei $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und $z_n \in A$ eine Folge mit $P(z_n) \to w_0 \in \mathbb{C}$. Dann muss z_n beschränkt sein. Es gibt also eine in $\mathbb{C}$ konvergente Teilfolge $z_{n_k} \to z_0$, und da A abgeschlossen ist, gilt $z_0 \in A$. Wegen Stetigkeit folgt $P(z_0) = w_0$, d. h. $w_0 \in P(A)$ und $P(A)$ ist abgeschlossen. Ist P nicht konstant, dann ist $P(\mathbb{C})$ offen und abgeschlossen, somit $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. □

2.6.8. **Satz** (***Schwarzsches Lemma***). *Sei $\mathbb{D} = B_1(0)$. Für jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ gilt*

$$|f(z)| \leqslant |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| \leqslant 1\,. \tag{2.16}$$

Gibt es $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $|f(w)| = |w|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung um 0, d.h. es gibt $\zeta \in S^1$ mit $f(z) = \zeta \cdot z$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Beweis: (Carathéodory)
Sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(a_0 = f(0) = 0)$ die Taylorentwicklung von f für $z \in \mathbb{D}$. Die Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^{n-1}$ hat denselben Konvergenzradius und definiert

$$g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}),\ \ g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1},\ \ z \in \mathbb{D}.$$

Dann gilt $f(z) = zg(z)$ und $g(0) = a_1 = f'(0)$. Sei $w \in \mathbb{D}$ fest und $r \in \big[|w|, 1\big]$.

$$w \in \overline{B_r}(0) \underset{\text{Maxprinzip}}{\rightsquigarrow} |g(w)| \leqslant \max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant \frac{1}{r}\,.$$

Für $r \to 1$ folgt $|g(w)| \leqslant 1$. Da w beliebig ist, folgt (2.16). Falls $|f(w)| = |w|$, $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oder $|f'(0)| = 1$, so hat $|g|$ ein Maximum in $\mathbb{D}$. Maximumprinzip $\rightsquigarrow g$ ist konstant, $g \equiv \zeta$ mit $|\zeta| = 1$. □

Eine biholomorphe Abbildung $f : D \to D$ einer offenen Menge auf sich selbst heißt ***Automorphismus von*** D. Die Menge $\mathrm{Aut}(D)$ der Automorphismen ist bzgl. der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

2.6.9. **Satz.** *Jeder Automorphismus $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ ist eine Drehung, d.h. $\exists\, \zeta = e^{i\varphi} \in S^1$, $f(z) = \zeta \cdot z$, $z \in \mathbb{D}$.*

Beweis: Nach dem Schwarzschen Lemma gilt

$$|f(z)| \leqslant |z|\,,\ \ |f^{-1}(w)| \leqslant |w| \text{ für alle } z, w \in \mathbb{D}\,.$$

Für $w = f(z) \Rightarrow |z| = |f^{-1}f(z)| \leqslant |f(z)|$. Also $|f(z)| = |z|$, $\left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1$, $z \neq 0 \Rightarrow \exists \zeta \in S^1$ mit $f(z) = \zeta \cdot z$ (Gleichheit im Schwarzschen Lemma). $\square$

11. Vorlesung, 31.05.2017

Betrachte nun die spezielle Möbiustransformation

$$\varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ \varphi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \qquad (a \in \mathbb{D} \text{ fest})\ .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_a(0) = a\,, \quad \varphi_a(a) = 0\,, \quad \varphi_a^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}\ , \quad \varphi_a^{-1} = \varphi_a\,, \\ \varphi_a'(0) = |a|^2 - 1\,, \quad \varphi_a'(a) = \frac{1}{|a|^2-1}\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

φ_a ist eine holomorphe Involution, die 0 und a vertauscht.

2.6.10. **Satz.**

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \Big\{ \mathbb{D} \ni z \mapsto \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \in \mathbb{D} : a \in \mathbb{D},\ \zeta \in S^1 \Big\}.$$

Beweis: Sei $a = f^{-1}(0)$. Dann ist

$$f \circ \varphi_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \text{ und } f \circ \varphi_a(0) = f(a) = 0\ .$$

Satz 2.6.9 $\Rightarrow \exists\, \zeta \in S^1$ mit $f \circ \varphi_a(z) = \zeta \cdot z$, $f(z) = \zeta\varphi_a^{-1}(z) = \zeta\varphi_a(z) = \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$. □

2.7. Isolierte Singularitäten.

2.7.1. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$. Ein isolierter Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ (d.h. so dass $\exists\, r > 0 : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset D$) heißt ***isolierte Singularität von*** f.
Wir unterscheiden drei Arten von isolierten Singularitäten:

(1) ***hebbare Singularitäten***: $\exists\, \tilde{f} \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\})$ mit $\tilde{f}|_D = f$.
(2) ***Pole***: nicht hebbar und $\exists\, g \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\})$, $p \in \mathbb{N}$ mit $f(z) = g(z)/(z-z_0)^p$ für $z \in D$.
(3) ***wesentliche Singularitäten***: weder hebbar, noch Pole.

Beispiele: Die Funktionen $f_1 : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = \frac{z^2-1}{z-1}$, $f_2 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ $f_2(z) = \frac{\sin z}{z}$, $f_3 : \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $f_3(z) = \frac{z}{e^z-1}$ haben hebbare Singularitäten in 1 bzw. in 0. Die Funktion $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ hat einen Pol in z_0, die Funktion $e^{\frac{1}{z}}$ hat eine wesentliche Singularität in 0. Die Funktion $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ hat Pole in $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Der Punkt 0 ist keine isolierte Singularität, da $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$.

2.7.2. **Satz (*Riemannscher Hebbarkeitssatz*).** *Eine isolierte Singularität z_0 einer Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ ist genau dann hebbar, wenn es eine Umgebung U von z_0 gibt, so dass f in $U \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.*

Beweis: Die Idee ist, die Funktion f mit $(z-z_0)^2$ zu multiplizieren; die so erhaltene Funktion h hat eine holomorphe Fortsetzung in z_0, die in z_0 zusammen mit ihrer ersten Ableitung verschwindet. Man kann also ein Faktor $(z-z_0)^2$ von h abspalten und der andere Faktor ist die gesuchte holomorphe Fortsetzung!

Nun ausführlich: Betrachte $g, h : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & , \quad z \neq z_0 \\ 0 & , \quad z = z_0 \ , \end{cases}$$
$$h(z) = (z - z_0)g(z) \ .$$

g ist nach Annahme stetig in z_0. Daher gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} g(z) = 0$$

und h ist $\mathbb{C}$–diffbar, also holomorph mit $h(z_0) = h'(z_0) = 0$.
Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz $\exists\, r > 0 : \forall\, z \in B_r(z_0)$

$$h(z) = (z - z_0)^2 \underbrace{(a_2 + a_3(z - z_0) + \ldots)}_{=:\tilde{f}(z)} = (z - z_0)^2 \tilde{f}(z)$$

mit $\tilde{f} \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$. Für $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt $h(z) = (z - z_0)g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$, also $\tilde{f}(z) = f(z)$. Setze

$$\tilde{\tilde{f}} : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}, \ \tilde{\tilde{f}}(z) = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in D \\ \tilde{f}(z) & , \quad z \in B_r(z_0) \ . \end{cases}$$

$\tilde{\tilde{f}}$ ist wohldefiniert und $\mathbb{C}$–diffbar in $D \cup \{z_0\}$ mit $\tilde{\tilde{f}}|_D = f$. □

2.7.3. **Definition.** Sei $f \in \mathcal{O}(D)$, $z_0 \in D$. Die ***Ordnung von*** f ***in*** z_0 ist

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(z_0) \neq 0\}, \ f \not\equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } z_0, \\ \infty, \quad f \equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } z_0. \end{cases}$$

(Nach dem Identitätssatz gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ falls $f \not\equiv 0$ in einer Umgebung von z_0.)

Beispiele: $f(z) \neq 0 \iff \operatorname{ord}_z(f) = 0$; $\operatorname{ord}_{z_0}(z - z_0)^n = n$;
$\operatorname{ord}_w(z - z_0)^n = 0$, $w \neq z_0$.

2.7.4. **Satz.** *Sei* $f \in \mathcal{O}(D)$, $z_0 \in D$, $m = \operatorname{ord}_{z_0}(f)$. *Dann gibt es* $g \in \mathcal{O}(D)$, *so dass* $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $z \in D$ *und* $g(z_0) \neq 0$.

Beweis: Die Taylorentwicklung von f um z_0 lautet

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots = (z - z_0)^m(a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \ldots) \ ,$$

wobei $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$. Daher ist

$$g : D \to \mathbb{C} \quad , \quad g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} & , \quad z \neq z_0 \\ a_m & , \quad z = z_0 \end{cases}$$

holomorph in D: g ist komplex diffbar in z_0, da $g(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \ldots$ eine konvergente Potenzreihe in einer Umgebung von z_0 ist. □

Sei nun $f \in \mathcal{O}(D), z_0$ ein Pol von f, d.h. z_0 ist nicht hebbar und

$$f = g/(z-z_0)^p \quad , \quad g \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\}) \quad , \quad p \in \mathbb{N} \, .$$

Sei $q = \operatorname{ord}_{z_0}(g)$ und $g(z) = h(z)(z-z_0)^q$, $h \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\})$, $h(z_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{h(z)(z-z_0)^q}{(z-z_0)^p} = \frac{h(z)}{(z-z_0)^{p-q}} \; , \; z \in D.$$

Es ist $p > q$, ansonsten wäre z_0 hebbar; f hat also die Darstellung

$$f = \frac{h}{(z-z_0)^r} \, , \quad h(z_0) \neq 0, \tag{2.18}$$

wobei $r = p - q > 0$.

2.7.5. **Definition.** Sei $f \in \mathcal{O}(D), z_0$ ein Pol von f. Die Zahl $r > 0$ aus der Darstellung (2.18) heißt die ***Ordnung des Pols*** z_0 ***von*** f. Die Zahl $\operatorname{ord}_{z_0} f = -r$ heißt die ***Ordnung der Funktion*** f ***in*** z_0.

Es ist ein unglücklicher Zufall, dass dem Wort “Ordnung” bei Polstellen z_0 eine doppelte Bedeutung zukommt: zum einen hat f in z_0 eine negative Ordnung, zum anderen hat f in z_0 einen Pol von positiver Ordnung. Mit Hilfe der Laurententeicklung werden wir später eine einheitliche Definition der Ordnung einer Funktion geben, siehe Definition 2.8.8, die die Definitionen 2.7.3 und 2.7.5 einschliesst.

Wir charakterisieren nun die Pole durch das Wachstumsverhalten.

2.7.6. **Satz.** *Eine isolierte Singularität z_0 von $f \in \mathcal{O}(D)$ ist ein Pol genau dann, wenn* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Beweis:

$$(*) \qquad \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty :\iff \forall M > 0 \; \exists r > 0 \; \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} : |f(z)| > M \, .$$

Sei $r > 0$, so dass $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset D$ und $|f(z)| > 1$, $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Betrachte

$$h : B_r(z_0) \to \mathbb{C} \quad , \quad h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & , \quad z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \\ 0 & , \quad z = z_0 \end{cases}$$

$(*) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{z \to z_0} h(z) = 0 = h(z_0)$, also h ist stetig in $B_r(z_0)$ und holomorph in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Nach dem Hebbarkeitssatz ist h holomorph in $B_r(z_0)$.
Sei $p = \operatorname{ord}_{z_0}(g)$. Es gilt $h(z) = (z-z_0)^p k(z)$ mit $k \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$, $k(z_0) \neq 0$. Für $z \neq z_0$ ist $k(z) = h(z)(z-z_0)^{-p} \neq 0$. Schließlich gilt

$$\frac{1}{f(z)} = h(z) = (z-z_0)^p k(z), \quad f(z) = \frac{1}{k(z)} \frac{1}{(z-z_0)^p} \, ,$$

wobei $\frac{1}{k} \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$. $\square$

12. Vorlesung, 12.06.2017

2.7.7. **Satz** (Satz von Casorati-Weierstrass). *Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ und z_0 eine isolierte Singularität von f. Äquivalent:*

(i) *z_0 ist eine wesentliche Singularität.*
(ii) *Für jede Umgebung U von z_0 mit $U \setminus \{z_0\} \subset D$ liegt $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$.*
(iii) *Es gibt eine Folge (z_n) in D mit $z_n \to z_0$, so dass $f(z_n)$ keinen Grenzwert in $\widehat{\mathbb{C}}$ hat.*

Beweis:
Angenommen, es gäbe U, so dass $f(U \setminus \{z_0\})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ liegt. Dann gibt es $B_r(a)$, $r > 0$, mit $f(U \setminus \{z_0\}) \cap B_r(a) = \emptyset$. Definiere

$$g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \quad , \quad g(z) = \frac{1}{f(z) - a} \ .$$

g ist holomorph und $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-a|} < \frac{1}{r}$.
Hebbarkeitssatz $\Rightarrow$ g ist holomorph fortsetzbar nach U. Es ist $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$, also

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \begin{cases} a + \frac{1}{g(z_0)} & , \quad \text{falls } g(z_0) \neq 0 \\ \infty & , \quad \text{falls } g(z_0) = 0 \ . \end{cases}$$

f hat also entweder eine hebbare Singularität (wenn $g(z_0) \neq 0$) oder einen Pol (wenn $g(z_0) = 0$). Widerspruch. □

2.7.8. **Satz** (Großer Satz von Picard). *Seien $f \in \mathcal{O}(D)$ und z_0 eine wesentliche isolierte Singularität von f. Dann sind für jede Umgebung U von z_0 nur zwei Fälle möglich:*

(i) *$f(U \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C}$ oder*
(ii) *$f(U \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C} \setminus \{$Punkt$\}$.*

2.7.9. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine ***meromorphe Funktion*** auf D ist eine Funktion $f : D' \to \mathbb{C}$, so dass

(i) $D' \subset \mathbb{C}$ offen ist und $P(f) := D \setminus D'$ diskret ist,
(ii) $f \in \mathcal{O}(D')$ und f einen Pol in jedem Punkt von $P(f)$ hat.

Wenn $P(f)$ leer ist, so ist $f \in \mathcal{O}(D)$; jede holomorphe Funktion ist also meromorph. Die Menge der meromorphen Funktionen in D wird mit $\mathcal{M}(D)$ bezeichnet. Die ***Ordnung der meromorphen Funktion*** f in einem Punkt $z \in D'$ des Definitionsbereichs ist definiert wie in Definition 2.7.3 und in einem Pol $z \in P(f)$ wie in Definition 2.7.5.

Beachte: Eine meromorphe Funktion auf D ist keine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$! Für $z \in P(f)$ gilt $\lim_{w \to z} f(w) = \infty$. Wir können deshalb die Funktion $\tilde{f} : D \to \widehat{\mathbb{C}}$,

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in D' \\ \infty & , \quad z \in P(f) \end{cases}$$

betrachten; $\widetilde{f} : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ ist die stetige Fortsetzung von $f : D' \to \mathbb{C}$ in $P(f)$. Wir identifizieren f mit $\tilde{f}$. Eine Umformulierung der Def. 2.7.9 ist also:

$$f \text{ meromorph auf } D \;:\Longleftrightarrow\; \begin{cases} f : D \to \widehat{\mathbb{C}} \text{ stetig} \\ P(f) := f^{-1}(\infty) \text{ abgeschlossen und diskret} \\ f \in \mathcal{O}(D \setminus P(f)) \end{cases}$$

Kurz gesagt: f heißt meromorph in D, wenn sie dort bis auf eine abgeschlossene diskrete Menge von Polen holomorph ist.

2.7.10. **Beispiel.**

(1) Rationale Funktionen $R = \frac{P}{Q}$, $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, sind meromorph in $\mathbb{C}$. Nach Kürzen der gemeinsamen Linearfaktoren von P und Q können wir annehmen, dass P, Q teilerfremd sind. Dann ist $R \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus N(Q))$ wobei $N(Q) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$ und R hat Pole in $N(Q)$.

(2) Sind $f, g \in \mathcal{O}(D)$, D Gebiet; $g \not\equiv 0$. Dann $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(D)$.

Beweis:

Sei $N(g) = \{z \in D : g(z) = 0\}$. Aus dem Identitätssatz folgt, dass $N(g)$ keinen Häufungspunkt in D hat, also $N(g)$ ist abgeschlossen und diskret. Sei

$$N = \{z \in N(g) : \operatorname{ord}_z(f) \geqslant \operatorname{ord}_z(g)\}\,.$$

Dann sind die Punkte in N hebbare Singularitäten von f/g und werden zum Definitionsbereich hinzugenommen. An den Punkten von $N(g) \setminus N =: P\big(f/g\big)$ hat f/g Pole. Da $P(f)$ als Teilmenge von $N(g)$ keine Häufungspunkte hat, ist $f \in \mathcal{M}(D)$.

$$\frac{f}{g} : D \to \widehat{\mathbb{C}} \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)} & , \quad \operatorname{ord}_z f = \operatorname{ord}_z g = k \\ 0 & , \quad \operatorname{ord}_z f > \operatorname{ord}_z g \\ \infty & , \quad \operatorname{ord}_z f < \operatorname{ord}_z g\,. \end{cases}$$

Die Funktion $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ist meromorph auf $\mathbb{C}$ (mit Polen in $\pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$) aber nicht rational.

(3) $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ ist keine meromorphe Funktion, da $z = 0$ kein Pol ist.

2.7.11. **Satz.** *$\mathcal{M}(D)$ ist ein Ring bezüglich Addition und Multiplikation der Funktionen. Ist D ein Gebiet, so ist $\mathcal{M}(D)$ ein Körper.*

Beachte: Ist D kein Gebiet, so ist

$$f : D \to \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \begin{cases} 1 & , \quad z \in D_1 \\ 0 & , \quad z \in D \setminus D_1 \end{cases}$$

(wobei D_1 eine Komponente von D ist) holomorph, aber $P\big(\frac{1}{f}\big) = D \setminus D_1$ ist offen, also nicht diskret, und $\frac{1}{f}$ definiert keine meromorphe Funktion.

Wir wollen nun holomorphe und meromorphe Funktionen in $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ betrachten.

2.7.12. **Definition.** Sei $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen mit $\infty \in D$ und $r > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subset D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph* in D, falls:

(i) f ist stetig in D.
(ii) f ist holomorph in $D \setminus \{\infty\}$.

Eine Funktion $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ heißt *meromorph* in D, falls:

(i) f ist stetig in D.
(ii) $P(f) := f^{-1}(\infty)$ ist abgeschlossen und diskret.
(iii) $f \in \mathcal{O}(D \setminus P(f))$.

2.7.13. **Beispiel.**

(1)

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^m} & , \quad z \neq \infty \quad (m \in \mathbb{N}) \\ 0 & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist holomorph.

(2)

$$P : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}},\ P(z) = \begin{cases} z^m & , \quad z \neq \infty \quad (m \in \mathbb{N}) \\ \infty & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist meromorph mit einem Pol in ∞.

(3) Seien $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ mit P, Q teilerfremd. Die rationale Funktion $R : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$

$$R(z) = \begin{cases} \frac{P(z)}{Q(z)} & , \quad z \in \mathbb{C},\ Q(z) \neq 0 \\ \infty & , \quad z \in \mathbb{C},\ Q(z) = 0 \\ \lim\limits_{z \to \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist meromorph in $\widehat{\mathbb{C}}$.

13. Vorlesung, 14.06.2017

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, so dass $D \cup \{\infty\}$ eine Umgebung von ∞ ist und sei $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$. Wir nehmen an, dass es ein $r > 0$ existiert mit f holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Betrachte die holomorphe Funktion $g : B_{1/r}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$. Dann gilt:

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorph $\iff$ $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{\infty\})$ und g hat eine hebbare Singularität in 0 mit $g(0) = f(\infty)$.

$f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph $\iff$ $f \in \mathcal{M}(D \setminus \{\infty\})$ und g hat einen Pol in 0.

2.7.14. **Definition.** Wir sagen, dass $f \in \mathcal{M}(D)$ eine ***Nullstelle (Pol) von Ordung*** p ***in*** ∞ hat, wenn dies für g in 0 der Fall ist. Wir sagen, dass f ***in*** ∞ ***eine wesentliche Singularität*** hat, wenn dies für g in 0 der Fall ist.

Beispiele.
(1) Ein Polynom vom Grad $m \geqslant 1$, $P : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ hat einen Pol der Ordnung m in ∞.
(2) $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ hat eine wesentliche Singularität in ∞.
(3) $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $z \mapsto z^p e^{\frac{1}{z}}$ hat in 0 eine wesentliche Singularität und in ∞ einen Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$.
Kurz gefasst: Definitionsgemäß hat $f(z)$ das gleiche Verhalten in ∞ wie $f\left(\frac{1}{z}\right)$ in 0.

2.8. **Laurentreihen und Laurententwicklungen.**

Eine holomorphe Funktion $f : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit isolierter Singularität lässt sich im Allgemeinen nicht in eine Taylorreihe entwickeln, aber in eine sogenannte Laurentreihe.

Beispiele.
(1) Hat f eine hebbare Singularität in z_0, so gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ in } B_r(z_0) \quad \text{(das ist wohl eine Taylorreihe).}$$

(2) Hat f einen Pol, so gilt $f = \dfrac{h}{(z - z_0)^p}$ mit $h(z_0) \neq 0$, also

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^p} \\ &= \frac{a_0}{(z - z_0)^p} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{p-1}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{(z - z_0)} + a_p + a_{p+1}(z - z_0) + \ldots\ , \end{aligned}$$

mit $a_0 \neq 0$.
(3)

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}\ , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ .$$

2.8.1. **Definition.** Eine ***Laurentreihe*** ist ein Paar von Reihen

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right),$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Wir schreiben dafür $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.
Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ heißt ***Hauptteil***, die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ***Nebenteil*** der Laurentreihe. Diese heißt *konvergent in* $z \in \mathbb{C}$ (*bzw. absolut konvergent, gleichmäßig oder normal konvergent in einer Menge*), wenn dies für den Hauptteil und Nebenteil der Fall ist. Der Grenzwert ist die Summe der entsprechenden Grenzwerte:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=-1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \ .$$

2.8.2. **Satz.** *Ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ auf $B_{1/r}(0)$ und die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ auf $B_R(0)$ konvergent, dann konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolut auf dem Ringgebiet $K_{r,R}(z_0) = \{z : r < |z-z_0| < R\}$ und normal (also gleichmäßig) auf jedem Ringgebiet $\overline{K}_{\varrho,\sigma} = \{z : \varrho \leqslant |z-z_0| \leqslant \sigma\}$, wobei $r < \varrho < \sigma < R$.*
Die Summe der Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^n$ ist holomorph in $K_{r,R}(z_0)$.

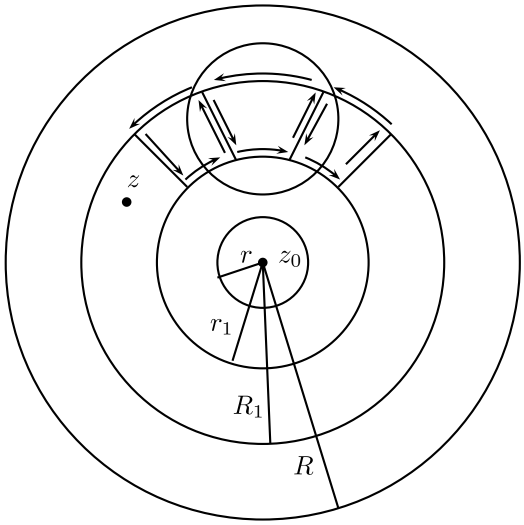
2.8.3. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für Ringgebiete).
Sei g holomorph im Ringgebiet

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\} \quad (0 \le r < R \le +\infty\,,\ z_0 \in \mathbb{C})\ . \tag{2.19}$$

Dann gilt für alle $r < r_1 < R_1 < R$

$$\int\limits_{|\zeta-z_0|=r_1} g(\zeta)\,d\zeta \ = \int\limits_{|\zeta-z_0|=R_1} g(\zeta)\,d\zeta\ . \tag{2.20}$$

Beweis:
Wir führen geschlossene Kurven wie in Figur ein, die in Sterngebieten (eigentlich Kreisscheiben) verlaufen. Auf diese Kurven wenden wir den Cauchyschen Integralsatz an. Durch Addition der Integrale erhalten wir (2.20)



□

Alternativer Beweis: Wir wenden den Satz von Stokes für das Gebiet K_{r_1,R_1} und die Differentialform $g(z)dz$. Es gilt allgemein für eine glatte Funktion h:

$$d(hdz) = dh \wedge dz = \left(\frac{\partial h}{\partial z}dz + \frac{\partial h}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge dz = \frac{\partial h}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \wedge dz\,.$$

Ist also g holomorph, so ist $d(gdz) = 0$. Folglich

$$\int\limits_{|\zeta - z_0| = R_1} g(\zeta)\,d\zeta - \int\limits_{|\zeta - z_0| = r_1} g(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{\partial K_{r_1,R_1}} g(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{K_{r_1,R_1}} d(g(\zeta)\,d\zeta) = 0\,.$$

2.8.4. **Satz** (Cauchysche Integralformel für Ringgebiete). *Sei f holomorph im Ringgebiet* (2.19). *Dann gilt für alle $z \in K_{r_1,R_1}(z_0)$ mit $r < r_1 < R_1 < R$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta - z_0| = R_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\,. \tag{2.21}$$

Beweis:
OBdA $z_0 = 0$. Seien z, r_1, R_1 wie oben fest. Wir wenden (2.20) für die holomorphe Funktion an:

$$g : K_{r,R}(0) \to \mathbb{C} \quad , \quad g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z\,. \end{cases}$$

Es ist

$$\int\limits_{|\zeta| = R_1} g(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{|\zeta| = R_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - f(z)\underbrace{\int\limits_{|\zeta| = R_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{2\pi i \text{ da } |z| < R_1} = \int\limits_{|\zeta| = R_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i\,f(z)\,,$$

$$\int\limits_{|\zeta| = r_1} g(\zeta)d\zeta = \int_{|\zeta| = r_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - f(z)\underbrace{\int\limits_{|\zeta| = R_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{0 \text{ da } |z| > r_1} = \int\limits_{|\zeta| = r_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\,.$$

□

2.8.5. **Satz** (Laurententwicklung). *Sei f holomorph in einem Ringgebiet* (2.19). *Dann hat f eine Laurententwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \, , \; z \in K_{r,R}(z_0) \, . \tag{2.22}$$

Dabei sind a_n ($n \in \mathbb{Z}$) eindeutig bestimmt durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, , \; r < \varrho < R \, . \tag{2.23}$$

Beweis:
OBdA $z_0 = 0$. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} &= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{z\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n f(\zeta)\, d\zeta \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} f(\zeta) \zeta^n \, d\zeta \right) z^{-(n+1)} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \quad , \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{-n+1}} \, .
\end{aligned}$$

Wegen $|\zeta| = r_1 < |z|$ konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $\{|\zeta| = r_1\}$ und die gliedweise Integration ist erlaubt.
Wie im Potenzreihenentwicklungssatz erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

Aus (2.19) erhalten wir (2.22). Allerdings haben wir in (2.23) nun $\varrho = r_1$ bzw. $\varrho = R_1$. Den allgemeinen Fall erhalten wir wegen (2.20) für $g(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$:
Für alle $r < \varrho < \sigma < R$ gilt

$$\int\limits_{|\zeta|=\varrho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} = \int\limits_{|\zeta|=\sigma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \, .$$

$\square$

Wir bemerken, dass die Cauchy-Abschätzungen (2.15) auch für die Koeffizienten der Laurententwicklung gelten:

$$|a_n| \leq M(r) r^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{wobei } M(r) = \sup_{\partial B_r(z_0)} |f|. \tag{2.24}$$

Daraus ergibt sich einen anderen Beweis des Riemannschern Hebbarkeitssaztes. Falls $|f| \leq M$ in einer punktierten Umgebung von z_0, so ist $|a_n| \leq M r^{-n}$, für alle $r > 0$ klein genug und alle $n \in \mathbb{Z}$. Mit $r \to 0$ erhalten wir $a_n = 0$ für alle $n < 0$.

14. Vorlesung, 19.06.2017

2.8.6. **Satz** (Laurentzerlegung). *Sei f holomorph in* (2.19). *Dann existieren eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen $g : B_R(0) \to \mathbb{C}$, $h : B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$, so dass*

$$f(z) = g(z - z_0) + h\left(\frac{1}{z - z_0}\right), \; z \in K_{r,R}(z_0) \; \text{und} \; h(0) = 0 \, .$$

Beweis:

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad , \quad h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

Eindeutigkeit: Übung. □

2.8.7. **Satz** (Klassifizierung der isolierten Singularitäten).
Sei z_0 eine isolierte Singularität der Funktion f und sei $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *die Laurententwicklung von f in einem Kreisring $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Die Singularität ist:*

(a) *hebbar* $\iff$ $a_n = 0$ *für alle* $n < 0$.
(b) *Pol der Ordnung* m $\iff$ $a_n = 0$ *für alle* $n < -m$, $a_{-m} \neq 0$.
(c) *wesentlich* $\iff$ $a_n \neq 0$ *für unendlich viele* $n < 0$.

Beweis: Übung. □

Mit Hilfe der Laurententwicklung geben wir eine einheitliche Definition der Ordnung einer Funktion, die die Definitionen 2.7.3 und 2.7.5 erweitert.

2.8.8. **Definition.** Sei f eine holomorphe Funktion und z_0 in Definitionsbereich von f oder eine isolierte Singularität von f. Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Laurententwicklung von f um z_0. Die ***Ordnung der Funktion f in z_0*** ist

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = \inf \left\{ n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0 \right\} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$.

Es gilt also:

f hat eine wesentliche Singularität in z_0	$\iff$	$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = -\infty$
f ist meromorph in z_0	$\iff$	$\operatorname{ord}_{z_0}(f) > -\infty$
f hat ein Pol von Ordnung k in z_0	$\iff$	$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = -k \quad (k \in \mathbb{N})$
f hat eine hebbare Singularität in z_0 oder ist holomorph in z_0	$\iff$	$\operatorname{ord}_{z_0}(f) \geq 0$
f hat eine Nullstelle von Ordnung k in z_0	$\iff$	$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = k \quad (k \in \mathbb{N})$
$f \equiv 0$ um z_0	$\iff$	$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = \infty$

Ist $\operatorname{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$, so gibt es eine Umgebung U von z_0, so dass f holomorph und nullstellenfrei auf $U \setminus \{z_0\}$ und meromorph auf U ist. Dann ist $1/f$ definiert und holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$ und meromorph auf U und es gilt

$$\operatorname{ord}_{z_0}\left(\frac{1}{f}\right) = -\operatorname{ord}_{z_0}(f).$$

Seien f_1, f_2 zwei meromorphen Funktionen in einer Umgebung von z_0. Dann ist $f_1 f_2$ und $f_1 + f_2$ meromorph in einer Umgebung von z_0 und es gilt

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f_1 f_2) = \operatorname{ord}_{z_0}(f_1) \operatorname{ord}_{z_0}(f_2),$$
$$\operatorname{ord}_{z_0}(f_1 + f_2) \geq \min\{\operatorname{ord}_{z_0}(f_1), \operatorname{ord}_{z_0}(f_2)\}.$$

Notiz. Mit Hilfe der Cuachy-Abschätzungen (2.24) können wir die Ordnung $\operatorname{ord}_{z_0}(f)$, also die Art der Singulariät in z_0, mit dem Wachstum von

$$M(r) = \sup_{\partial B_r(z_0)} |f|,$$

verbinden.

Satz. *Es gilt*

$$\operatorname{ord}_{z_0} = \liminf_{r \to 0} \frac{\log M(r)}{\log r} \cdot$$

Ist $\operatorname{ord}_{z_0} > -\infty$*, so gilt*

$$\operatorname{ord}_{z_0} = \lim_{r \to 0} \frac{\log M(r)}{\log r} = \lim_{z \to z_0} \frac{\log |f(z)|}{\log |z - z_0|} \cdot$$

2.9. **Folgen holomorpher Funktionen.** Wir erinnern uns den folgenden Satz aus Analysis II:

2.9.1. **Satz** (Vertauschung von Grenzwert und Differentiation). *Sei* $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *mit den Eigenschaften:*

(1) $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ *punktweise,*
(2) f_n *stetig differenzierbar,*
(3) $(f_n')_n$ *konvergiert gleichmäßig auf* $[a, b]$.

Dann ist f *auch differenzierbar, und es gilt* $f' = \lim_{n \to \infty} f_n'$.

Notiz. Die wesentliche Voraussetzung hier ist (3), wie das folgende Beispiel zeigt: Seien

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x + \frac{1}{n^n}} \cdot$$

Für alle $x \in [0, 1]$ gilt $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(1) < \frac{2}{n}$, also $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 =: f(x)$ gleichmäßig. Es gilt

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} (x + \frac{1}{n^n})^{\frac{1}{n} - 1}.$$

Daraus folgt

$$f_n'(0) = \frac{1}{n^2} \frac{1}{n^{1-n}} = \frac{n^{n-1}}{n^2} = n^{n-3} \longrightarrow \infty.$$

Also $f'(0) \neq \lim_{n \to \infty} f_n'(0)$. Hier konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig, jedoch nicht $f_n' \to f'$.

Wir können sogar eine ***stetige, nirgends differenzierbare Funktion*** als gleichmäßigen Limes von stetigen Funktionen konstruieren. Wir formulieren das als eine Übung. Für mehr dazu siehe Walter, Analysis I, S. 353, 359.

Aufgabe. (a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Seien $a_n \to x_0$ und $b_n \to x_0$ Folgen in I mit $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ und $a_n < b_n$ für alle n. Zeigen Sie: $d_n := \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \to f'(x_0)$ für $n \to \infty$.
(Tipp: Mit $f(x) = f(x_0) + r(x)(x - x_0)$ liegt d_n zwischen $r(a_n)$ und $r(b_n)$, warum?)
(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ wie folgt: Ist $1 \leqslant m \leqslant 2^n$

und $x \in \left[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right]$, so sei $f_n(x) := x - \frac{m-1}{2^n}$ für ungerades m und $f_n(x) := \frac{m}{2^n} - x$ für gerades m. Man überzeugt sich leicht, dass f_n wohldefiniert und stetig ist.

(i) Skizzieren Sie f_1, f_2, f_3, f_4 und $\sum_{k=1}^4 f_k$.

(ii) Zeigen Sie, dass $f := \sum_{k=1}^\infty f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert und stetig ist.

(iii) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $[a_n, b_n]$ ein Intervall der Form $\left[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right]$ (wie oben), das x_0 enthält. Zeigen Sie: $\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ ist für gerades n gerade und für ungerades n ungerade, und f ist in x_0 nicht differenzierbar.

Die Funktion f ist also stetig, aber nirgends differenzierbar.

Wir werden sehen, dass in der Theorie der holomorphen Funktionen die Bedingung (3) aus Satz 2.9.1 überflüssig ist, wenn die Folge f_n gleichmäßig konvergiert. Die springende Punkte sind, dass

- wegen der Cauchy-Formel, ist der gleichmäßige Grenzwert holomorpher Funktionen wieder holomorph,
- bei holomorphen Funktionen erlauben die Cauchy-Abschätzungen eine Kontrolle der Ableitungen durch die Funktion.

2.9.2. **Definition.** Sei D eine offene Menge, $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass (f_n) lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert, wenn es zu jedem $a \in D$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f_n \to f$, $n \to \infty$ gleichmäßig in $B_\delta(a)$.

2.9.3. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Genau dann gilt $f_n \to f$, $n \to \infty$ lokal gleichmäßig in D, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset D$ gilt $f_n \to f$, $n \to \infty$ gleichmäßig in K.*

2.9.4. **Beispiel.** Sei $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = z^n$. Dann $f_n \to 0$, $n \to \infty$ wegen $|f_n(z)| \leq r^n$ für $|z| \leq r$ und $r^n \to 0$, $n \to \infty$ für $r < 1$. Aber f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0, da $\|f_n\|_{\mathbb{D}} = \sup_{\mathbb{D}} |f_n| = 1$. Also ist die lokal gleichmäßige Konvergenz eine schwächere Forderung als die gleichmäßige Konvergenz.

2.9.5. **Satz** (Weierstraßscher Konvergenzsatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n \in \mathcal{O}(D)$ und $f_n \to f$, $n \to \infty$, lokal gleichmäßig in D. Dann ist $f \in \mathcal{O}(D)$ und für die Ableitungen hat man auch $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$, $n \to \infty$, lokal gleichmäßig für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Zu $z_0 \in D$ wählen wir $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset D$, also

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } z \in B_r(z_0) \qquad \text{(Cauchy Integralformel)} \;.$$

Für $z \in B_r(z_0)$ fest, $\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \to \frac{f(z)}{\zeta - z}$, $n \to \infty$, gleichmäßig auf $\partial B_r(z_0)$, können wir Integral und Grenzwert vertauschen und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad , \quad z \in B_r(z_0)\;.$$

Daraus folgt, dass f holomorph ist (siehe z.B. 2.3.11).
Sei nun $K \subset D$ kompakt, $0 < r < d(K, \partial D)$, $K(r) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \leq r\}$. Nach

Satz 2.5.6 (Cauchysche Abschätzungen) gilt:

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_K \leq \frac{k!}{r^k}\|f_n - f\|_{K(r)} \to 0 \ , \ \ n \to \infty \ .$$

$\square$

2.9.6. **Satz.** *Seien $g_n \in \mathcal{O}(D)$ holomorph und die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ konvergiere lokal gleichmäßig in D. Dann ist $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(z)$, holomorph und für $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}(z)$ für $z \in D$.*

2.9.7. **Definition.** Seien $g_n : D \to \mathbb{C}$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ *lokal normal,* wenn für jedes $a \in D$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{B_\delta(a)} < \infty$.
Dann konvergiert $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ auch lokal gleichmäßig.

2.9.8. **Satz.** *Die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$, $g_n \in \mathcal{O}(D)$, konvergiere lokal normal in D. Dann ist $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ ebenfalls holomorph.*

Beispiel. Die *Riemannsche ζ–Funktion* ist definiert durch

$$\zeta : \{\mathrm{Re}\, s > 1\} \to \mathbb{C} \quad , \quad \zeta(s) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ .$$

Die Reihe konvergiert normal in jeder Halbebene $\{\mathrm{Re}\, z \geq 1 + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.
ζ ist somit holomorph.

15. VORLESUNG, 21.06.2017

3. DIE ALLGEMEINE CAUCHY–THEORIE

Der Integralsatz und die Integralformel wurden für Sterngebiete bewiesen. Frage: Sei D ein beliebiges Gebiet. Für welche Kurven $\gamma \subset D$ gilt für alle $f \in \mathcal{O}(D)$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\ ?$$

Antwort: Es sind genau die geschlossenen Kurven, deren Windungszahlen um alle Punkte im Komplement von D verschwinden. Diese Kurven werden nullhomolog genannt. Wir führen nun den Begriff der Homologie, der uns erlaubt, eine allgemeinere Form der Cauchy Theorie zu formulieren.

3.1. **Homologieversion der Cauchyschen Sätze.**

Für eine geschlossene Kurve γ und $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ wurde die Windungszahl definiert durch

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\ .$$

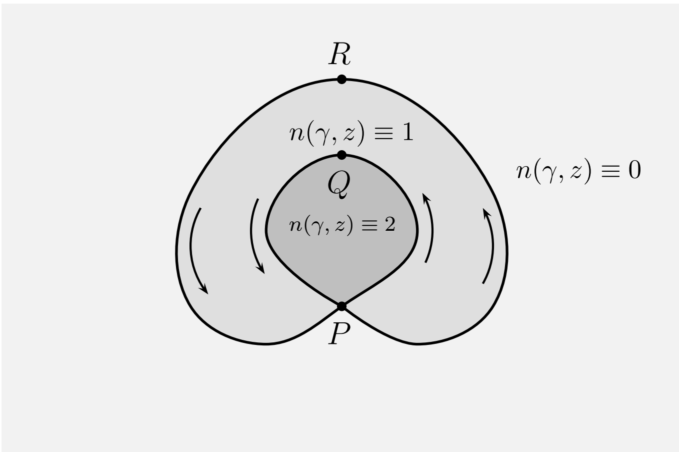
3.1.1. **Satz** (Eigenschaften der Windungszahl)**.**

(i) $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ *für* $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

(ii) $\mathbb{C} \setminus |\gamma| \ni z \mapsto n(\gamma, z)$ *ist lokal–konstant.*

(iii) $n(\gamma, z) = 0$ *für* z *in der unbeschränkten Komponente von* $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

Als Beispiel betrachte die Kurve $PQPRP$:



3.1.2. **Definition.** Ist γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$, so heißen

$$\operatorname{Int}\gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \,:\, n(\gamma, z) \neq 0\} \quad \text{das } \textit{Innere} \text{ von } \gamma \text{ und}$$

$$\operatorname{Ext}\gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \,:\, n(\gamma, z) = 0\} \quad \text{das } \textit{Äußere} \text{ von } \gamma\ .$$

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt γ *nullhomolog in* D, wenn $\operatorname{Int}\gamma \subset D$.

Die Mengen $\operatorname{Int}\gamma$ und $\operatorname{Ext}\gamma$ sind offen in $\mathbb{C}$, da $n(\gamma,z)$ lokal konstant ist. Die Menge $\operatorname{Int}\gamma$ ist beschränkt, die Menge $\operatorname{Ext}\gamma$ ist unbeschränkt, genauer, falls $|\gamma| \subset B_r(a)$, so gilt $\operatorname{Int}\gamma \subset B_r(a)$ und $\mathbb{C}\setminus B_r(a) \subset \operatorname{Ext}\gamma$.

Die Redeweise 'nullhomolog in D' kommt aus der algebraischen Topologie, und drückt intuitiv aus, dass γ ein Flächenstück in D berandet.

Bemerkung. γ ist nullhomolog in D, wenn es keinen Punkt des Komplements von D umläuft.

$$\operatorname{Int}\gamma \subset D \iff \big(n(\gamma,z)\neq 0 \Rightarrow z\in D\big) \iff \big(z\notin D \Rightarrow n(\gamma,z)=0\big)$$

3.1.3. **Lemma.**

(i) *Sei γ eine stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve und $\varphi : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist*

$$F:\mathbb{C}\setminus|\gamma|\to\mathbb{C} \quad , \quad F(z)=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

holomorph.

(ii) *Sei D ein Gebiet. Sei $g : D\times D\to\mathbb{C}$ stetig und $g(\zeta,z)$ holomorph in z für jedes $\zeta\in D$. Dann ist*

$$G(z)=\int_\gamma g(\zeta,z)\,d\zeta$$

holomorph.

Beweis: (i) Sei $z_0\in\mathbb{C}\setminus|\gamma|$ fest. Dann gilt

$$F(z)-F(z_0)=\int_\gamma \frac{(z-z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}\,d\zeta \qquad \text{und daher}$$

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\,d\zeta=\int_\gamma \frac{(z-z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^2}\,d\zeta\ .$$

Sei $r=d(z_0,\gamma)>0$. Für $|z-z_0|\le r/2$ gilt $|\zeta-z|\ge r/2$ für $\zeta\in|\gamma|$. Die Standardabschätzung für Integrale liefert

$$\left|\int_\gamma \frac{(z-z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^2}\,d\zeta\right|\le\frac{2|z-z_0|}{r^3}\cdot\max_\gamma|\varphi|\cdot\ell(\gamma)\ ,$$

und für $z\to z_0$ strebt dies gegen 0. Also existiert $F'(z_0)$ und hat den behaupteten Wert. Somit ist F holomorph.

(ii) Zu zeigen (Morera): Für jedes Dreieck $\Delta\Subset D$ gilt $\int_{\partial\Delta} G(z)\,dz=0$.

$$\int\limits_{\partial\Delta} G(z)\,dz=\int\limits_{\partial\Delta}\int_\gamma g(\zeta,z)\,d\zeta\,dz=\int\limits_\gamma\int\limits_{\partial\Delta} g(\zeta,z)\,dz\,d\zeta=0\ ,$$

denn das innere Integral verschwindet (Goursat), da $g(\zeta,z)$ holomorph in z ist. $\square$

3.1.4. **Definition.**

(i) Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ geschlossene Kurven, so nennt man die formale Summe $\Gamma := \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ einen *Zyklus* und $|\Gamma| := |\gamma_1| \cup \ldots \cup |\gamma_n|$ seinen Träger. Ist $f : |\Gamma| \to \mathbb{C}$ stetig, dann definiert man

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz \quad \text{und} \quad n(\Gamma, z) := \sum_{j=1}^{n} n(\gamma_j, z)\ ,\ z \notin |\Gamma|\ .$$

(ii) Sei Γ ein Zyklus. Wir definieren

$$\operatorname{Int}\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\Gamma| \,:\, n(\Gamma, z) \neq 0\} \quad \text{das } \textit{Innere} \text{ von } \gamma \text{ und}$$

$$\operatorname{Ext}\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\Gamma| \,:\, n(\Gamma, z) = 0\} \quad \text{das } \textit{Äußere} \text{ von } \Gamma\ .$$

Ein Zyklus Γ in einem Gebiet D heißt Γ *nullhomolog in* D, wenn $\operatorname{Int}\gamma \subset D$, d. h. $n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \notin D$.
Zwei Zykel Γ_1, Γ_2 heißen *homolog in* D, wenn $\Gamma_1 - \Gamma_2$ nullhomolog in D sind, d. h. $n(\Gamma_1, z) = n(\Gamma_2, z)\ \forall\, z \notin D$.

(iii) Ein Zyklus Γ in $\mathbb{C}$ heißt *Randzyklus* einer offenen Menge $V \subset \mathbb{C}$, wenn

$$\partial V = |\Gamma| \quad , \quad n(\Gamma, z) = 1 \quad \forall\, z \in V \quad , \quad n(\Gamma, z) = 0 \quad \forall\, z \notin \overline{V}\ .$$

Wir sagen Γ berandet V. Analog wird eine *Randkurve* γ definiert als einfach geschlossene Kurve, die V berandet.

Beispiel. Eine geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *einfach*, falls $\gamma|_{[a,b)}$ injektiv ist. Eine einfache geschlossene Kurve kann also als eine stetige injektive Abbildung $\gamma : S^1 \to \mathbb{C}$ betrachtet werden, also ein Homöomorphismus $\gamma : S^1 \to \gamma(S^1) =: |\gamma|$. Eine einfache geschlossene Kurve heißt auch *Jordankurve*. Ein beschränktes Gebiet, das von einer Jordankurve berandet wird, heißt *Jordangebiet*.

Satz (Jordanscher Kurvensatz). *Ist $\gamma : S^1 \to \mathbb{C}$ eine Jordankurve, dann gilt:*
(i) $|\gamma|$ zerlegt die Ebene $\mathbb{C}$ in genau zwei Gebiete, ein beschränktes Gebiet G_1 und ein unbeschränktes Gebiet G_2, wovon $|\gamma|$ ist gemeinsamer Rand: $\partial G_1 = \partial G_2 = |\gamma|$.
(ii) Für $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ gilt $n(\gamma, z) = \pm 1$ (konstant), falls $z \in G_1$ und $n(\gamma, z) = 0$, falls $z \in G_2$.

Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene beschränkte glatt berandete Teilmenge. Laut Definition jeder Punkt von ∂D eine offene Umgebung U hat mit einer lokal definierende Funktion $r \in \mathscr{C}^\infty(U)$, so dass $U \cap D = \{z \in \mathbb{C} : r(z) < 0\}$ und $dr \neq 0$ auf U. Mit Hilfe einer Zerlegung der Eins lässt sich zeigen, dass es eine global definierende Funktion $\rho \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{C})$ gibt, d. h.

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \rho(z) < 0\}, \quad \partial D = \{z \in \mathbb{C} : \rho(z) = 0\}, \quad \mathbb{C} \setminus \overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : \rho(z) > 0\}$$

und $d\rho \neq 0$ in einer Umgebung von ∂D. Der Rand ∂D ist eine glatte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Wir legen die Randorientierung auf ∂D fest (so dass anschaulich D "links von ∂D liegt"). Da ∂D eine kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist, so hat ∂D endlich viele zusammenhängenden Komponenten C_1, …, C_m. Jede Komponente ist eine kompakte glatte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Nach einem Satz aus der Differentialtopologie ist jede kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit diffeomeorph zum Kreis S^1. Wir setzen ein

Diffeomorphismus $S^1 \to C_j$ mit der Standardparametrisierung des Kreises zusammen und erhalten eine Parametrisierung von C_j durch eine geschlossenen Kurve γ_j. Wir wählen γ_j, so dass sie C_j in positiver Richtung durchläuft. Dann berandet der Zyklus $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_m$ die offene Menge D.

Dann ist D gegeben durch $D = \{z \in \mathbb{C} : \rho(z) < 0\}$, wobei $\rho \in \mathscr{C}^\infty(D)$ und $d\rho \neq 0$(im Sinne von Analysis 3). Dann ist der Rand ∂D eine glatte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Wir legen die Randorientierung auf ∂D fest, so dass anschaulich D “links von ∂D liegt”. Da ∂D eine kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, so ist ∂D diffeomeorph zum Kreis S^1, nach einem Satz aus der Differentialtopologie. Wir setzen dieses Diffeomorphismus mit der Standardparametrisierung des Kreises und erhalten eine Paramatrisierung von ∂D durch eine geschlossenen Kurve γ. Wir wählen γ, so dass sie ∂D in positiver Richtung durchläuft. Dann wird D von Γ berandet.

3.1.5. **Satz** (Hauptsatz der Cauchyschen Funktionentheorie). *Sei D ein Gebiet und $\Gamma \subset D$ Zyklus in D. Dann sind äquivalent:*

(i) *Für alle $f \in \mathcal{O}(D)$ gilt $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0$ (Cauchy-Integralsatz),*

(ii) *Für alle $f \in \mathcal{O}(D)$ gilt die Cauchy-Formel*

$$n(\Gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad z \in D \setminus |\Gamma|\,,$$

(iii) *Γ ist nullhomolog in D.*

Beweis:
(i)⇒(ii):
Sei $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$, $\zeta \in D \setminus \{z\}$, und $g(z) = f'(z)$. Dann ist g holomorph in D und

$$0 = \int\limits_\Gamma g(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - 2\pi i \cdot f(z) \cdot n(\Gamma, z)\ ,\ z \in D \setminus |\Gamma|\ .$$

(ii)⇒(i):
Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ und $z \in D \setminus |\Gamma|$. Dann ist $h(\zeta) = (\zeta - z) \cdot f(\zeta) \in \mathcal{O}(D)$ mit $h(z) = 0$. Somit

$$0 = n(\Gamma, z) \cdot h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta\ .$$

(i)⇒(iii):
Sei $z \notin D$. Dann gilt

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0\ , \quad \text{da} \quad f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z} \in \mathcal{O}(D)\ , \quad \text{wenn } z \notin D\ .$$

(iii)⇒(ii):
Sei $f \in \mathcal{O}(D)$. Zeige: $\quad \operatorname{Int}\Gamma \subset D \quad \Rightarrow \quad \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0 \quad .$

Definiere $g : D \times D \to \mathbb{C}$,

$$g(\zeta, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z \,. \end{cases}$$

Dann ist zu zeigen, dass

(1) g stetig ist und $g(\zeta, z)$ holomorph in z.
(2) Dann folgt mit Lemma 3.1.3(ii), dass $G(z) = \int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta$ holomorph ist.
(3) $G = F|_D$ ist Einschränkung einer ganzen Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
(4) F ist beschränkt und sogar $F(z) \to 0$ für $z \to \infty$.
Dann folgt (Liouville) $F \equiv 0$.

Zu (1), $g(\zeta, z)$ ist holomorph in z und in ζ.
Für die Stetigkeit auf der Diagonalen sei $(z_0, z_0) \in D \times D$. Für $(\zeta, z) \in B_\delta(z_0) \times B_\delta(z_0)$ betrachte

$$g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) = \frac{1}{\zeta - z} \int\limits_{[\zeta, z]} \big(f'(w) - f'(z_0)\big)\, dw \,.$$

Nun ist f' stetig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so, dass $|f'(w) - f'(z_0)| < \varepsilon$ in $B_\delta(z_0)$.
Somit gilt auch (2).
Für (3) setze

$$F(z) = \begin{cases} G(z) & , \quad z \in D \\ H(z) & , \quad z \in \operatorname{Ext}\Gamma \,, \end{cases}$$

wobei $H(z) := \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ holomorph ist nach Lemma 3.1.3(i).
F ist wohldefiniert, da $G(z) = H(z)$ für $z \in D \cap \operatorname{Ext}\Gamma$. Aus der Voraussetzung $\operatorname{Int}\Gamma \subset D$ folgt nun $D \cup \operatorname{Ext}\Gamma = \mathbb{C}$, d.h. F ist eine ganze Funktion.
Zu (4): Für $R > \max|\Gamma|$ und $|z| > R$ gilt

$$|F(z)| = |H(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \ell(\Gamma) \cdot \max_\Gamma |f| \cdot \frac{1}{d(z, \Gamma)} \longrightarrow 0 \quad (z \to \infty) \,.$$

□

16. Vorlesung, 26.06.2017

3.1.6. **Definition.** Sei U offen und $a \in U$. Sei $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $r > 0$, so dass $\overline{B}_r(a) \subset U$. Dann heißt

$$\operatorname{res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} f(z)\, dz$$

das *Residuum* von f in a.

Bemerkung.

(i) Ist $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$ die Laurent–Reihe um b, dann ist $\operatorname{res}_b f = a_{-1}$.

(ii) Ist f holomorph in a, dann ist $\operatorname{res}_a f = 0$.

(iii) Sei $h(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-b)^n$ ein Hauptteil um b und $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{b\}$ eine geschlossene Kurve. Dann ist $h : \mathbb{C} \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} h(z)\, dz = \frac{a_{-1}}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-b} = a_{-1} \cdot n(\gamma, b) = n(\gamma, b) \cdot \operatorname{res}_b h \,.$$

(iv) Ist a außerwesentliche Singularität von $f \not\equiv 0$, dann ist

$$\operatorname{ord}_a(f) = \operatorname{res}_a \left(\frac{f'}{f} \right).$$

Beweis von (iv): Sei f meromorph in G und $a \in G$. Sei $n = \operatorname{ord}_a(f) \in \mathbb{Z}$. Es gibt eine Umgebung $U \subset G$ von a und eine holomorphe Funktion h in U mit

$$f(z) = (z-a)^n \cdot h(z) \quad \text{und} \quad h(a) \neq 0 \,.$$

Die Funktion h erhählt man, wenn man die Laurent–Entwicklung von f um a betrachtet:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k = (z-a)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} (z-a)^k = (z-a)^n \cdot h(z) \,.$$

Es gilt $h(a) = a_n \neq 0$ und $n = \operatorname{ord}_a f$. Weiter erhält man

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)} \,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ klein genug, dass $h(z) \neq 0$ in $B_{2\varepsilon}(a)$. Dann folgt

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int\limits_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{n}{z-a}\, dz + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = 2\pi i \cdot n \,.$$

□

3.1.7. **Satz** (Residuensatz). *Sei D ein Gebiet, $S \subset D$ eine diskrete Menge in D und $f : D \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine geschlossene Kurve in $D \setminus S$ mit $\operatorname{Int}\gamma \subset D$ (d.h. γ ist nullhomolog in D). Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{z\in\operatorname{Int}\gamma} n(\gamma,z)\cdot \operatorname{res}_z f\ .$$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{rcl} z\in D\setminus S & \Rightarrow & \operatorname{res}_z f = 0 \\ \overline{\operatorname{Int}\gamma}\ \text{ist kompakt} & \Rightarrow & \operatorname{Int}\gamma\cap S\ \text{ist endlich} \end{array}\right\}\quad \text{Summe rechts ist endlich}$$

Sei $S\cap \operatorname{Int}\gamma = \{b_1,\dots,b_n\}$. Seien

$$h_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)}(z-b_j)^n$$

die Hauptteile von f um b_j. Dann ist $f - \sum\limits_{j=1}^{n} h_j$ holomorph in einer Umgebung V von $\overline{\operatorname{Int}\gamma}$. Wegen $\operatorname{Int}\gamma\subset V$ folgt mit dem Cauchy–Integralsatz

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n}\int_\gamma h_j(z)\,dz \\ &= \int_\gamma f(z)\,dz - 2\pi i\sum_{j=1}^{n} n(\gamma,b_j)\cdot\operatorname{res}_{b_j} f\ . \end{aligned}$$

□

3.1.8. **Satz** (Residuensatz für Zykel). *Sei D ein Gebiet, $S\subset D$ eine diskrete Menge in D und $f : D\setminus S\to\mathbb{C}$ holomorph. Sei $\Gamma\subset D\setminus S$ nullhomologer Zyklus in D. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{z\in\operatorname{Int}\Gamma} n(\Gamma,z)\cdot\operatorname{res}_z f\ . \tag{3.1}$$

Ist Γ Randzyklus von $V \Subset D$, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{z\in V}\operatorname{res}_z f\ . \tag{3.2}$$

Die Ordnung $\operatorname{ord}_a(f)$ einer holomorphen Funktion $f\in\mathcal{O}(D)$ in einem Punkt $a\in D$ wurde in Definition 2.7.3 eingeführt:

$$\operatorname{ord}_a(f) = \begin{cases} \min\{n\in\mathbb{N}_0 : f^{(n)}(a)\neq 0\}, & f\not\equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } a, \\ \infty, & f\equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } a. \end{cases}$$

3.1.9. **Definition.** Sei $f : D\to\mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$\nu_f(a) := \operatorname{ord}_a(f - f(a))$$

die ***Vielfachheit***, mit der f den Wert $f(a)$ annimmt. Statt Vielfachheit spricht man auch von *Multiplizität*. Für $U \subset D$ heißt

$$N_f(U, w) = \sum_{z \in f^{-1}(w) \cap U} \nu_f(z)$$

die Anzahl der w–Stellen von f in U gezählt mit Vielfachheit.

Es gilt

$$\nu_f(a) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}, & \text{falls} f \text{ nicht konstant in einer Umgebung von } a, \\ \infty, \quad \text{falls } f \text{ konstant in einer Umgebung von } a. \end{cases}$$

Ist f konstant, dann $\nu_f(a) = \infty$. Ansonsten gibt es ein $n \geq 1$, so dass in der Nähe von a gilt $f(z) = f(a) + (z-a)^n g(z)$ mit g holomorph in a und $g(a) \neq 0$. Dann ist $\nu_f(a) = n$. Für $n = 1$ gilt $g(a) = f'(a)$.

Beispiele: Für $f(z) = z^n$ gilt $\nu_f(0) = n$, $\nu_f(z) = 1$ falls $z \neq 0$ und $N_f(\mathbb{C}, w) = n$ für alle $w \in \mathbb{C}$. Allgemeiner, ist $f \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom von grad n, so gilt $N_f(\mathbb{C}, w) = n$ für alle $w \in \mathbb{C}$ (Fundamentalsatz der Algebra).

Bemerkung.

(i) $\nu_f(a) \geq 1\,, \quad \nu_f(a) = 1 \iff f'(a) \neq 0\,.$

(ii) Ist f nicht–konstant so gilt

$$\nu_f(a) = \operatorname{res}_a \left(\frac{f'}{f - f(a)} \right) . \tag{3.3}$$

Aus dem Residuensatz folgt sofort:

3.1.10. **Satz** (Argumentprinzip)**.** *Sei G Gebiet und f holomorph in G. Seien $a_1, a_2, \ldots$ die paarweise verschiedenen w–Stellen von f und $\Gamma \subset G$ nullhomologer Zyklus in G mit $a_\mu \notin |\Gamma|$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \sum_\mu n(\Gamma, a_\mu) \cdot \nu_f(a_\mu) \,. \tag{3.4}$$

Ist Γ Randzyklus von $V \Subset G$, dann ist dies die Anzahl $N_f(w, V)$ der w–Stellen in V:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = N_f(w, V) \,. \tag{3.5}$$

Ist γ die Randkurve von $V \Subset G$, so gilt

$$N_f(w, V) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = n(f \circ \gamma, w)\,, \tag{3.6}$$

also läuft die Bildkurve $f \circ \gamma$ so oft um den Punkt w wie w–Stellen in V liegen.

Beweis: Die Formel (3.4) folgt aus (3.1) angewandt auf $\frac{f'}{f-w}$ und (3.3). Die Formel (3.5) folgt aus (3.2) und (3.3). Die Gleichheit (3.6) folgt aus der folgenden

Bemerkung. Sei f holomorph in G und γ geschlossene Kurve in G. Sei $w \notin f(|\gamma|)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta - w} = n(f\circ\gamma, w)\ .$$

□

Aus (3.6) wird ersichtlich, warum Satz 3.1.10 Argumentprinzip genannt wird. Die Windungszahl $n(f\circ\gamma, w)$ gibt bis aus den Faktor 2π die Gasamtänderung des Argumentes der Funktion $f\circ\gamma(t) - w$ an, wenn t das Definitionsintervall von γ durchläuft.

Bemerkung. Ist f meromorph mit den Polstellen $b_1, b_2, \ldots$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = \sum_{\mu} n(\Gamma, a_\mu)\cdot \nu_f(a_\mu) + \sum_{\nu} n(\Gamma, b_\nu)\cdot \operatorname{ord}_{b_\nu} f\ .$$

Ist Γ Randzyklus, so muß man also noch die Anzahl der Polstellen $N_f(\infty, V)$ in V abziehen:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = N_f(w,V) - N_f(\infty, V)\,.$$

3.1.11. **Satz** (Rouché). *Seien f, g holomorph in G und Γ Randzyklus von $V \Subset G$. Gilt $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in |\Gamma|$, so haben f und g gleichviele Nullstellen in V (mit Vielfachheit).*

Beweis: Sei $h_\lambda = f + \lambda(g-f)$, $\lambda \in [0,1]$. Dann ist $h_0 = f$ und $h_1 = g$. Wegen

$$|\lambda(g(z) - f(z))| \le |g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \text{für } z \in |\Gamma|$$

ist $h_\lambda(z) \neq 0$ auf $|\Gamma|$. Somit ist die Anzahl der Nullstellen in V

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z) + \lambda(g'(z) - f'(z))}{f(z) + \lambda(g(z) - f(z))}\,dz\ .$$

Nun hängt N_λ stetig von λ ab, und da $N_\lambda \in \mathbb{Z}$, folgt $N_0 = N_1$. □

Es gibt eine Version des Satzes von Rouché für meromorphe Funktionen: Seien f, g meromorph in G und Γ Randzyklus von $V \Subset G$. Gilt $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in |\Gamma|$, so gilt $N_f(0,V) - N_f(\infty,V) = N_g(0,V) - N_g(\infty,V)$.
Wir geben zwei Anwendungen des Satzes von Rouché, der Fundamentalsatz der Algebra und die Sätze von Hurwitz (die etwas später kommen). Es kommt darauf an, bei vorgegebener Funktion f eine Vergleichsfunktion g mit bekannter Nullstellenzahl so zu finden, dass die Ungleichung im Satz von Rouché erfüllt ist.

3.1.12. **Satz** (Fundamentalsatz der Algebra).
Sei $P \in \mathbb{C}[z]$ ein nicht konstantes Polynom von Grad n. Dann ist für jedes $w \in \mathbb{C}$ die Anzahl der w-Stellen $N_P(\mathbb{C}, w)$ gleich n. Insbesondere hat das Polynom n Nullstellen in $\mathbb{C}$, gezählt mit Vielfachheit.

Beweis:
O.b.d.A. sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$, $n \geq 1$. Setze $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = P(z)$, $g(z) = z^n$. Für $r > 0$ hinreichend groß gilt

$$|f(w) - g(w)| = |a_{n-1}w^{n-1} + \ldots + a_0| < |w^h| = |g(w)| \ ,$$

da

$$\lim_{w \to \infty} \frac{a_{n-1}w^{n-1} + \ldots + a_0}{w^n} = 0 \ .$$

Also folgt: $N_f(0, B_r(0)) = N_g(0, B_r(0)) = n$. □

Einen anderen Beweis haben wir in 2.5.4 mit Hilfe des Satzes von Liouville gegeben.

17. VORLESUNG, 28.06.2017

3.2. **Anwendung des Residuensatzes auf die Berechnung von Integralen.** Zunächst betrachten wir *trigonometrische Integrale*.

3.2.1. **Satz.** *Sei $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion. Q habe keine Nullstelle auf $|z| = 1$. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \sum_{w \in \mathbb{D}} \operatorname{res}_w \widetilde{R}$$

mit $\widetilde{R}(z) = \frac{1}{z} R\big(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\big)$.

Beweis:
Sei $z \in S^1$, $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$. Dann

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \quad , \quad \sin t = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big) ,$$

also

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int\limits_{\partial \mathbb{D}} R\left(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\right) \frac{1}{iz}\, dz = \frac{1}{i} 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{D}} \operatorname{res}_w \widetilde{R} .$$

$\square$

Beispiel. Sei $w \in \mathbb{C}$, $|w| \neq 1$. Für $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2w \cos t + w^2} = I$ gilt

$$R(x, y) = \frac{1}{1 - 2wx + w^2} ,$$

$$\widetilde{R}(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - 2w\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + w^2} = \frac{1}{z} \frac{z}{z - wz^2 - w + w^2 z} = \frac{1}{(z - w)(1 - wz)} .$$

$\widetilde{R}$ hat genau einen Pol in $\mathbb{D}$, nämlich w falls $|w| < 1$ oder $\frac{1}{w}$, falls $|w| > 1$. Ist $|w| < 1$, so ist

$$\operatorname{res}_w \widetilde{R} = \lim_{z \to w} (z - w) \widetilde{R}(z) = \frac{1}{1 - w^2} .$$

Ist $|w| > 1$, so ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_w \widetilde{R} &= \lim_{z \to \frac{1}{w}} \Big(z - \frac{1}{w}\Big) \widetilde{R}(z) \\
&= \lim_{z \to \frac{1}{w}} \frac{zw - 1}{w} \cdot \frac{1}{(z - w)(1 - wz)} \\
&= -\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\frac{1}{w} - w} = \frac{1}{w^2 - 1} \\
\Rightarrow \quad I &= \begin{cases} \frac{2\pi}{1 - w^2} & , \ |w| < 1 \\ \frac{2\pi}{w^2 - 1} & , \ |w| > 1 . \end{cases}
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun *uneigentliche Integrale*.

3.2.2. **Satz.** *Sei f holomorph in $D \setminus F$, wobei $D \supset \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, F endlich und $F \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Es existiere $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ und es sei $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Dann gilt:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} w > 0} \operatorname{res}_w f$$

Beweis: Sei $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = re^{it}$. Dann gilt

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{\gamma(r)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} w>0} \operatorname{res}_w f$$

für r genügend groß. Standardabschätzung $\Rightarrow$

$$\Big|\int_{\gamma(r)} f(z)\,dz\Big| \leq \sup_{\gamma(r)} |f| \cdot \pi r \to 0 \quad , \quad r \to \infty\ .$$

$\square$

3.2.3. **Folgerung.** *Sei $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion, so dass Q keine reelle Nullstelle hat und $\operatorname{grad} Q \geq \operatorname{grad} P + 2$. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\ w>0} \operatorname{res}_w R\ .$$

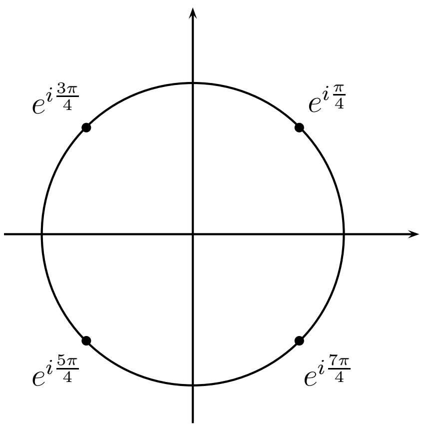
Beweis: $\operatorname{grad} Q \geq \operatorname{grad} P + 2 \;\Rightarrow\; |R(z)| = O\big(\frac{1}{|z|^2}\big)$, also $\lim_{z\to\infty} zR(z) = 0$. $\square$

Beispiel.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx\ .$$

Betrachte $R(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$.
Die Nullstellen des Nenners sind die 4-ten Wurzeln von -1:

$$\Big\{e^{i\frac{(\pi+2k\pi)}{4}} : k = 0,1,2,3\Big\} = \Big\{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}\Big\}$$



Für $w = e^{i\frac{\pi}{4}}$ gilt:

$$\operatorname{res}_w f = \lim_{z\to w}(z-w)\cdot\frac{z^2}{1+z^4} = \frac{w^2}{(1+z^4)'|_{z=w}} = \frac{w^2}{4w^3} = \frac{1}{4w} = \frac{1}{4}\overline{w} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)\ .$$

Für $w_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = iw$ gilt:

$$\operatorname{res}_{w_1} f = \frac{w_1^2}{4w_1^3} = \frac{1}{4}\overline{w_1} = -\frac{i}{4}\overline{w} = -\frac{i}{4\sqrt{2}}(1-i)$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\pi i \cdot \frac{(1-i)^2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{i(1-2i-1)}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ .$$

$\square$

18. Vorlesung, 03.07.2017

Wir wenden nun die Methode der Residuen für Integrale der Form

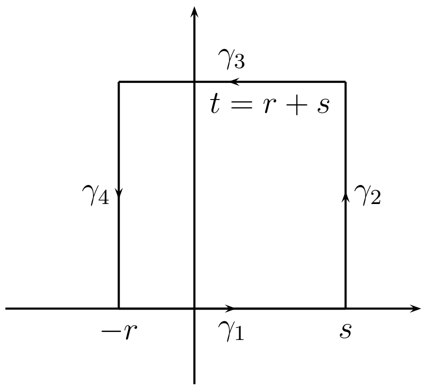
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}\,dx\,. \qquad (*)$$

an.

3.2.4. **Satz.**
Sei $F \subset \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ eine endliche Menge. Sei f holomorph in einer offenen Umgebung von $\overline{\mathbb{H}} \setminus F$, so dass $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Dann existiert für alle $\xi \in \mathbb{R}_+$ das uneigentliche Integral $(*)$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx = 2\pi i \sum_{w\in F} \operatorname{res}_w(f(z)e^{i\xi z}).$$

Beweis: Betrachte $r, s > 0$ und das Quadrat wie in der Skizze. Wir wählen r, s genügend groß, so dass $F \subset Q$.



Es gilt:

$$\begin{aligned}
2\pi i \sum_{w\in F} \operatorname{res}_w(f(z)e^{i\xi z}) &= \int_{\partial Q} f(z)e^{i\xi z}dz \\
&= \int_{-r}^{s} f(x)e^{i\xi z}dx + \int_{\gamma_2} f(z)e^{i\xi z}dz + \int_{\gamma_3} f(z)e^{i\xi z}dz + \int_{\gamma_4} f(z)e^{i\xi z}dz
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $\int\limits_{\gamma_i} f(z)e^{i\xi z}dz \to 0$, wenn $r, s \to \infty$ für $i = 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{\gamma_2} f(z)e^{i\xi z}dz\Big| &= \Big|\int\limits_0^t f(s+iu)e^{i\xi(s+iu)}du\Big| = \Big|\int\limits_0^t f(s+iu)e^{i\xi s}e^{-\xi u}du\Big| \\ &\leqslant \|f(z)e^{i\xi s}\|_{|\gamma_2|}\int\limits_0^t e^{-\xi u}du = \|f\|_{|\gamma_2|}\left(-\frac{1}{\xi}e^{-\xi u}\right)\Big|_0^t = \|f\|_{|\gamma_2|}\cdot\frac{1-e^{-t\xi}}{\xi} \\ &\leqslant \frac{1}{\xi}\|f\|_{|\gamma_2|} \to 0\,, \quad s\to\infty\,.\end{aligned}$$

Analaog

$$\Big|\int\limits_{\gamma_4} f(z)e^{i\xi z}dz\Big| \leq \frac{1}{\xi}\|f\|_{|\gamma_4|} \to 0\,, \quad r\to\infty$$

und

$$\Big|\int\limits_{\gamma_3} f(z)e^{i\xi z}dz\Big| \leq \sup_{\operatorname{Im} z=t}|e^{i\xi z}f(z)|(r+s) = \underbrace{e^{-\xi t}\cdot t}_{\to 0}\underbrace{\sup_{\operatorname{Im} z=t}|f(z)|}_{\to 0} \to 0 \text{ für } t\to\infty\,.$$

□

3.2.5. **Folgerung.** *Sei* $R = \frac{P}{Q}$ *eine rationale Funktion ohne reelle Polstellen und* $\deg Q \geq \deg P + 1$. *Dann gilt*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\xi x}dx = 2\pi i\sum_{w\in\mathbb{H}}\operatorname{res}_w\left(R(z)e^{i\xi z}\right)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}_+$.

Beweis: In der Tat, $\lim\limits_{z\to\infty} R(z) = 0$. □

Beispiel. Sei $\xi \in \mathbb{R}_+$, Dann gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi x}}{x-ib}dx = 2\pi i\operatorname{res}_{ib}\left(\frac{e^{i\xi x}}{z-ib}\right) = \begin{cases}2\pi i e^{-\xi b} & ,\ \operatorname{Re} b > 0\\ 0 & ,\ \operatorname{Re} b < 0\,.\end{cases}$$

Sei nun $b \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi x}}{x\pm ib}dx = \begin{cases}2\pi i e^{-\xi b} & \text{für } -\\ 0 & \text{für } +\,.\end{cases}$$

Summe und Differenz dieser Identitäten ergibt:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{b\cos\xi x}{x^2+b^2}dx = \int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin\xi x}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-\xi b} \qquad \text{(Laplace-Identitäten)}\,.$$

Anwendung: berechnen wir $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (siehe Analysis-Skript, §6.6, Bsp. (7)). Es gilt:

$$\int\limits_0^R \frac{x\sin x}{x^2+b^2}\,dx \to \int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+b^2}\,dx\ ,\ \ R\to\infty$$

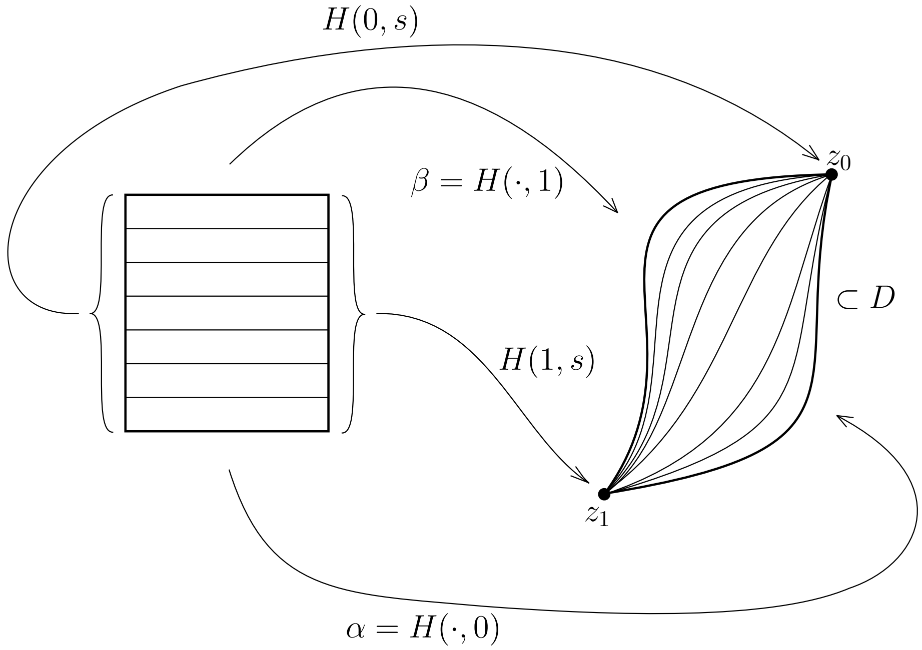
ist gleichmäßig in $b>0$. Daraus folgt, dass $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ existiert und

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to 0}\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\ .$$

19. Vorlesung, 05.07.2017

3.3. Eine Homotopieversion der Cauchyschen Sätze.

3.3.1. **Definition.** Zwei Kurven $\alpha, \beta : [0,1] \to D \subset \mathbb{C}$ heißen ***homotop*** in D (bei festen Endpunkten) falls eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ - genannt ***Homotopie*** - existiert, so dass $\alpha(t) = H(t,0)$, $\beta(t) = H(t,1)$ für alle $t \in [0,1]$ und $\alpha(0) = H(0,s) = \beta(0)$, $\alpha(1) = H(1,s) = \beta(1)$ für alle $s \in [0,1]$. Bezeichnung: $\alpha \sim \beta \pmod D$. Eine geschlossene Kurve $\alpha : [0,1] \to D,\ \alpha(0) = \alpha(1) = z_0$ heißt ***nullhomotop***, falls α zur konstanten Kurve $\beta(t) \equiv z_0$ homotop ist. Bezeichnung: $\alpha \sim 0 \pmod D$. Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt ***einfach zusammenhängend***, falls jede geschlossene Kurve in D nullhomotop in D ist.



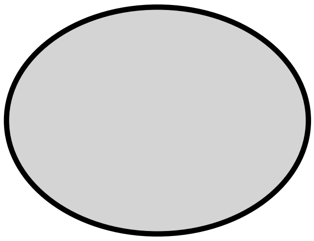
3.3.2. **Beispiel.**
(1) Ist $D \subset \mathbb{C}$ konvex und α, β haben die gleichen Anfangs- bzw. Endpunkte $\alpha(0) = \beta(0),\ \alpha(1) = \beta(1)$. Dann sind $\alpha \sim \beta$ und $H(t,s) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$.
(2) Die Homotopierelation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Sei

$$C(D, z_0) = \{\alpha : [0,1] \to D : \alpha(0) = \alpha(1) = z_0\}$$

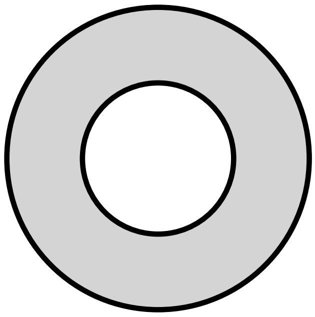
Die Menge $\pi_1(D; z_0) = C(D, z_0)/_\sim$ ist eine Gruppe bzgl. $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$ und heißt ***Fundamentalgruppe*** von D bzgl. z_0. Das Einselement ist $e = c_{z_0}$, wobei $c_{z_0}(t) = z_0$ für alle $t \in [0,1]$. Ist D wegzusammenhängend, so sind $\pi_1(D, z_0)$ und $\pi_1(D, z_1)$ isomorph für alle $z_0, z_1 \in D$: ist $\gamma : [0,1] \to D$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$, so ist $\pi_1(X, z_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, z_1)$, $[\alpha] \to [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$. In diesem Fall lassen wir z_0 in der Bezeichnung weg und schreiben $\pi_1(D)$. Für ein Gebiet D gilt:

$$D \text{ ist einfach zusammenhängend} \iff \pi_1(D) = 1 = \{e\}.$$

(3) Konvexe Gebiete und Sterngebiete sind einfach zusammenhängend. Ein Ringgebiet $K_{r,R}(z_0)$ ist nicht einfach zusammenhängend.



einfach zusammenhängend



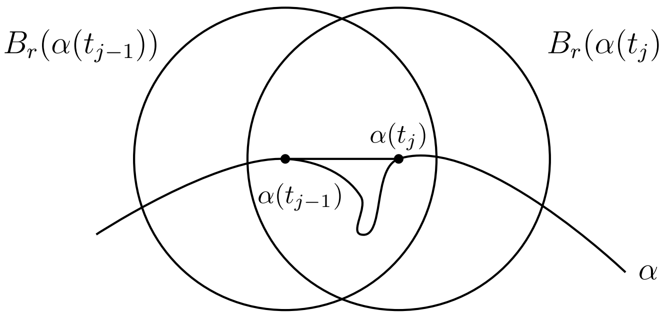
nicht einfach zusammenhängend

Da wir nun mit beliebigen (d.h. stetigen) Kurven arbeiten, definieren wir das Integral längs dieser Kurven.

3.3.3. **Lemma.** *Sei $\alpha : [a,b] \to D$ eine Kurve. Dann existiert eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ von $[a,b]$ und ein $r > 0$, so dass $\alpha([t_{j-1}, t_j]) \subset B_r(\alpha(t_{j-1})) \cap B_r(\alpha(t_j)) \subset D$ für $j = 1, \ldots, n$. Ist $f \in \mathcal{O}(D)$ so, ist die Zahl*

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha(t_{j-1})}^{\alpha(t_j)} f(z)\, dz$$

unabhängig von der Wahl der Unterteilung. Ist α stückweise $\mathscr{C}^1$, so stimmt diese Summe mit $\int_\alpha f(z)\, dz$ überein.
($\varepsilon := d(|\alpha|, \partial D) > 0$; α gleichmäßig stetig $\rightsquigarrow$ $\exists \delta > 0$ usw.)



3.3.4. **Definition.**
Ist α stetig und $f \in \mathcal{O}(D)$, so *definieren* wir $\int_\alpha f(z)\, dz$ durch die obige Summe.

Sei nun $Q = [0,1] \times [0,1]$ und $H : Q \to D$ stetig. Betrachte die Kurven
$\alpha_1 = H|_{[0,1]\times\{0\}}$, $\alpha_2 = H|_{\{1\}\times[0,1]}$, $\alpha_3 = H|_{[0,1]\times\{1\}}$, $\alpha_4 = H|_{\{0\}\times[0,1]}$ und setze
$H|_{\partial Q} := \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3^{-1} * \alpha_4^{-1}$.
BILD EINFÜGEN!!!

3.3.5. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $H : Q \to D$ stetig, $f \in \mathcal{O}(D)$. Dann gilt:*

$$\int\limits_{H|_{\partial Q}} f(z)\,dz = 0\ .$$

Beweis:
Da $H(Q)$ kompakt ist, gilt $r = d(H(Q), \partial D) > 0$.
Sei $0 < \varepsilon < r$. H ist stetig und Q kompakt $\Rightarrow$ H ist gleichmäßig stetig auf Q $\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0\, \forall\, x, y \in Q\,,\, d_\infty(x,y) < \delta : d_2(H(x), H(y)) < \varepsilon$.
BILD EINFÜGEN!!!
Sei nun $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$ und zerlege Q in ein Netz von n^2 Quadrate Q_{jk} $(1 \leq j, k \leq n)$. Für alle (j,k) gilt also $H(Q_{jk}) \subset B_\varepsilon(w)$ für ein $w \in H(Q)$. $B_\varepsilon(w)$ ist Sterngebiet, also gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete

$$\int\limits_{H|_{\partial Q_{jk}}} f(z)\,dz = 0\ .$$

Außerdem gilt

$$\int\limits_{H|_{\partial Q}} f(z)\,dz = \sum_{j,k=1}^{n} \int\limits_{H|_{\partial Q_{jk}}} f(z)\,dz = 0\ .$$

BILD EINFÜGEN!!!
Die Integrale auf den inneren Kurven heben sich weg. □

3.3.6. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für homotope Kurven)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$ und α, β homotope Kurven.*
Dann gilt $\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\beta f(z)\,dz$. Ist α nullhomotop, so $\int_\alpha f(z)\,dz = 0$.

Beweis:
Sei $H : Q \to D$ eine Homotopie zwischen α, β. Dann gilt nach 3.3.5

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{H|_{\partial Q}} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha} f(z)\,dz + \underbrace{\int\limits_{c_{\alpha(1)}} f(z)\,dz}_{=0} + \int\limits_{\beta^{-1}} f(z)\,dz + \underbrace{\int\limits_{c_{\alpha(0)}} f(z)\,dz}_{=0} \\ &= \int\limits_{\alpha} f(z)\,dz - \int\limits_{\beta} f(z)\,dz. \end{aligned}$$

□

3.3.7. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete)**.** *Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ und α eine geschlossene Kurve. Dann gilt:*

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz = 0\ .$$

Beweis:
α ist homotop zu einer konstanten Kurve c_{z_0} und $\int_{c_{z_0}} f(z)\,dz = 0$. □

3.3.8. **Folgerung.** *Ist α nullhomotop in D, so ist α nullhomolog in D.*

Beweis:
Ist $z \notin D$, so ist $D \ni \zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ holomorph in D, also $n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$, da $\alpha \sim 0$. □

Die Umkehrung ist falsch. Die folgende Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, ist nicht nullhomotop, sie ist aber nullhomolog, da $n(\gamma, a) = n(\gamma, b) = 0$.
BILD EINFÜGEN!!!

3.3.9. **Folgerung.** *Sei D einfach zusammenhängend. Dann gilt:*

(a) *Für jede $f \in \mathcal{O}(D)$, $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, existiert $g \in \mathcal{O}(D)$ mit $f = \exp(g)$, d.h. $g = \log f$.*
(b) *Für jede $f \in \mathcal{O}(D)$, $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $h \in \mathcal{O}(D)$ mit $h^n = f$ (d.h. h ist eine holomorphe n-te Wurzel von f auf D).*

20. Vorlesung, 10.07.2017

4. Biholomorphe Abbildungen

4.1. Konforme Abbildungen. Wir wollen nun die Holomorphiebedingungen geometrisch interpretieren.

4.1.1. Definition. (i) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Der *nichtorientierte Winkel* zwischen z, w ist $\measuredangle(z,w) := \arccos \frac{z \cdot w}{\|z\|\|w\|} \in [0, \pi]$, wobei $z \cdot w$ das reelle Skalarprodukt von $z, w \in \mathbb{R}^2$ ist. Der *orientierte Winkel* zwischen z, w ist $\arg \frac{w}{z}$.

(ii) Eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt *winkeltreu*, falls für alle $z, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\measuredangle(Tz, Tw) = \measuredangle(z, w)$ und *orientierungstreu*, falls T eine positiv–orientierte Basis in $\mathbb{R}^2$ in eine positiv–orientierte Basis überführt. T ist *orientierungstreu* $\iff \det T > 0$.

(iii) Seien γ_1, γ_2 zwei Kurven in $\mathbb{C}$, $z = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ ein Schnittpunkt. Die Kurven seien diffbar in t_1, t_2 und es gelte $\gamma_1'(t_1) \neq 0$, $\gamma_2'(t_2) \neq 0$. Der *unorientierte* (bzw. *orientierte*) *Winkel* zwischen γ_1, γ_2 ist der unorientierte (bzw. orientierte) Winkel zwischen $\gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2)$.

(iv) Eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung $f : D \to D'$ ($D, D' \subset \mathbb{C}$ offen) heißt *lokal konform*, falls $df(z)$ winkeltreu und orientierungstreu ist für alle $z \in D$. Ist außerdem f bijektiv, so heißt f *konform*.

4.1.2. Bemerkung. (1) Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear.
T ist winkeltreu und orientierungstreu $\iff$ die assoziierte Matrix von T hat die Form $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.
$\iff$ T ist die Komposition einer Rotation und einer Streckung:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \sqrt{\det T} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$\iff$ Der orientierte Winkel zwischen z, w ist gleich dem orientierten Winkel zwischen Tz, Tw.

(2) $f : D \to D'$ ist lokal konform $\iff$ der orientierte Winkel zwischen zwei regulären Kurven in einem Schnittpunkt z gleich ist dem orientierten Winkel der Bildkurven im Schnittpunkt $f(z)$.

Beweis: Wir zeigen:
$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist winkeltreu $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \; \forall v, w \in \mathbb{R}^2$: $\langle Tv, Tw \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle$
„$\Leftarrow$“

$$\cos \measuredangle(v, w) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{Tv \cdot Tw}{\|Tv\| \cdot \|Tw\|} = \cos \measuredangle(Tv, Tw)$$

also $\measuredangle(v, w) = \measuredangle(Tv, Tw)$, da $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ injektiv ist.
„$\Rightarrow$“
Sei $\{e_1, e_2\}$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$. Sei $\sigma_i = \|Te_i\|^2 > 0$.

$$e_1 \perp e_2 \quad \Rightarrow \quad Te_1 \perp Te_2 \text{ d.h. } \langle Te_1, Te_2 \rangle = 0 \quad (*)$$

$$e_1 + e_2 \perp e_1 - e_2 \quad \Rightarrow \quad T(e_1 + e_2) \perp T(e_1 - e_2) \quad \Rightarrow$$

$$0 = \langle Te_1 + Te_2, Te_1 - Te_2 \rangle \underset{(*)}{=} \sigma_1 - \sigma_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \sigma_2 \ .$$

Setze $\lambda := \sqrt{\sigma_1} = \sqrt{\sigma_2}$. Dann gilt für $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $w = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$:

$$\langle Tv, Tw \rangle = \alpha_1 \beta_1 \|Te_1\|^2 + \alpha_2 \beta_2 \|Te_2\|^2 = \lambda^2 \langle v, w \rangle$$

$\square$

Es gilt also: T winkeltreu $\iff$ $\exists \lambda > 0$: $\frac{1}{\lambda} T$ orthogonal. T winkeltreu und orientierungserhaltend $\iff$ $\exists \lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} T$ orthogonal und $\det \left(\frac{1}{\lambda} T\right) > 0$
$\iff$ $\exists \lambda > 0$: $\frac{1}{\lambda} T \in SO(2)$ $\iff$ $\exists \lambda > 0 \, \exists \varphi \in \mathbb{R}$: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \lambda \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$,
(wobei $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ die darstellende Matrix von T bzgl. der Standardbasis ist.)
$\iff$ T $\mathbb{C}$–linear (und $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) = \lambda e^{i\varphi} \cdot z$).

4.1.3. **Satz.** *Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist lokal-konform $\iff$ $f \in \mathcal{O}(D)$ und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.*
$f : D \to \mathbb{C}$ konform $\iff$ f ist biholomorph.

Beweis:

$$\begin{aligned} f \text{ lokal-konform } &:\iff \forall z \in D\text{: } df(z) \text{ winkeltreu und orientierungserhaltend} \\ &\overset{4.1.2}{\iff} \forall z \in D\text{: } df(z) \ \mathbb{C}\text{–linear und bijektiv} \\ &\iff f \text{ holomorph in } D \text{ und } f'(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in D \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt aus dem Biholomorphiesatz 4.1.5. $\square$

4.1.4. **Satz** (Umkehrsatz)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebungen $U \subset D$ von z_0 und v von $f(z_0)$, so dass $f|_v : U \to V$ biholomorph ist.*

Beweis: Wir wissen, dass f stetig reell-diffbar ist. (Eigentlich ist eine holomorphe Abbildung sogar $\mathscr{C}^\infty$, siehe Forgerung 2.3.8). Nun gilt $df(z_0) = f'(z_0)\, dz$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Deshalb ist $df(z_0) \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ein Isomorphismus. Reeller Umkehrsatz $\rightsquigarrow$ $\exists U, V$ wie oben mit $f|_U : U \to V$ ein $\mathscr{C}^\infty$-Diffeomorphismus. Satz 2.1.9 $\rightsquigarrow$ f^{-1} holomorph. $\square$

Ein anderes Argument dafür, dass $df(z_0)$ isometrisch ist:
Wegen der Cauchy-Riemannschen Gleichungen gilt für die Jacobi-Matrix von f in z_0:

$$\det J_f(z_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0 \ .$$

4.1.5. **Satz** (Biholomorphiesatz)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, injektiv mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann ist $f(D)$ offen und $f : D \to f(D)$ biholomorph.*

Beweis: Vgl. Diffeomorphiesatz Königsberger 2, Kap. 3, §3.3 $\square$

4.1.6. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist f injektiv, so ist $f(D)$ offen und $f : D \to f(D)$ biholomorph.*

Beweis:
O.B.d.A. D ist ein Gebiet. f injektiv $\Rightarrow f$ nicht konstant $\Rightarrow f(D)$ offen.
Wegen 4.1.5 reicht es zu zeigen, dass $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Angenommen, es gibt $a \in D$ mit $f'(a) = 0$. Dann hat die Funktion $g : D \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(z) - f(a)$ eine Nullstelle der Ordnung $p \geq 2$ in a. Argumentprinzip (Satz 3.1.10) $\rightsquigarrow p = N_g(0) = n(\gamma, 0)$, wobei $\gamma(t) = g(a + re^{it})$, $r > 0$ genügend klein, fest. Aber für $|w|$ genügend klein, gilt dann $p = n(\gamma, 0) = n(\gamma, w) = N_g(w)$. Wir wählen r so, dass $g'(z) \neq 0$ für $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$. Dann hat w zwei verschiedene Urbilder in D, Widerspruch zur Injektivität von f. $\square$

4.2. Die Sätze von Arzela-Ascoli und Montel.

Ziel: Charakterisierung der Kompaktheit in dem Raum $\mathscr{C}(X)$ der stetigen Funktion auf einem kompakten metrischen Raum.
Ist V ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum und $K \subset V$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) K ist kompakt (K hat die Heine–Borel Überdeckungseigenschaft).
(ii) K folgenkompakt (K hat die Bolzano–Weierstrass Eigenschaft, d.h. jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge).
(iii) K ist beschränkt und abgeschlossen.

Für unendlich–dimensionale Vektorräume gilt diese Charakterisierung nicht mehr:

4.2.1. **Satz** (Satz von Riesz). *Die Einheitskugel* $\overline{B_1(0)} = \{v \in V : \|v\| \leqslant 1\}$ *eines Banachraums* V *ist kompakt genau dann, wenn* $\dim V < \infty$.

Ist also $\dim V = \infty$, so ist die Einheitskugel nicht kompakt, obwohl sie beschränkt und abgeschlossen ist. Wir suchen nun ein Kompaktheit-Kriterium in der Raum der stetige Funktionen. Sei nun (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Betrachte

$$\mathscr{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ stetig}\}$$

mit der $\sup$-Norm $\|f\| = \sup_X |f|$. Dann ist $(\mathscr{C}(X), \|\cdot\|)$ ein Banachraum und i. A. gilt $\dim \mathscr{C}(X) = \infty$. Eine Funktionenfolge konvergiert in $(\mathscr{C}(X), \|\cdot\|)$ genau dann, wenn die Folge gleichmäßig auf X konvergiert.

Wir formulieren nun ein Analogon des Satzes von Bolzano-Weierstrass in $\mathscr{C}(X)$. Dazu brauchen wir einen neuen Begriff. Wie sagen, dass eine Folge (f_n) in $\mathscr{C}(X)$ *gleichgradig stetig* ist, wenn gilt: für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta = \delta(x, \varepsilon)$, so dass für alle $x' \in B_\delta(x)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$. Man beachte, dass δ für alle f_n derselben Wert hat, weshalb die Redeweise gleichgradig stetig.

4.2.2. **Satz** (Satz von Arzela–Ascoli). *Sei* (f_n) *eine Folge in* $\mathscr{C}(X)$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) (f_n) *ist beschränkt in* $\mathscr{C}(X)$*, d. h.* $\sup_n \|f_n\| < \infty$.
(2) (f_n) *ist gleichgradig stetig. Dann besitzt* (f_n) *eine konvergente Teilfolge in* $\mathscr{C}(X)$

Beweis: Wir benutzten das Cantorsche Diagonalverfahren, um eine Teilfolgen zu konstruieren, die auf eine dichte abzählbare Menge konvergiert. Aus der gleichgradigen Stetigkeit folgt, dass die so erhaltene Grenzfunktion auf ganz X in Supremumsnorm konvergiert.

1. Schritt: Es gibt eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge $A \subset X$.In der Tat, sei $n \in \mathbb{N}$. Da (X, d) kompakt ist, so existiert $A_n = \{x_{n,1}, \ldots, x_{n,k_n}\} \subset X$, so dass $X = \bigcup_{j=1}^{k_n} B_{1/n}(x_{n,j})$. Dann ist $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ höchstens abzählbar und für alle $x \in A, n \in \mathbb{N}$ gibt es $a \in A$ mit $d(x, a) < 1/n$, d.h. A liegt dicht in X.

2. Schritt: Wir zeigen, dass es eine Telfolge (v_n) von (f_n) gibt, so dass für alle $a \in A$ $(v_n(a))$ konvergiert. Definiere $A_p = \{a_1, \ldots, a_p\}$, $p \in \mathbb{N}$. Betrachte die Folge $(f_n(a_1))$. Sie ist beschränkt: $|(f_n(a_1))| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Bolzano–Weierstrass besitzt $(f_n(a_1))$ eine konvergente Teilfolge $(f_n^{(1)}(a_1))$. Die Folge $(f_n^{(1)}(a_1))$ ist auch beschränkt, besitzt also eine konvergente Teilfolge $(f_n^{(2)}(a_2))$. Da $f_n^{(2)}$ Teilfolge von $f_n^{(1)}$ ist, konvergiert auch $f_n^{(2)}(a_1)$, also $f_n^{(2)}$ konvergiert auf A_2.
Rekursiv konstruieren wir Folgen $(f_n^{(k)})_n$, so dass $(f_n^{(k)})$ eine Teilfolge von $(f_n^{(k-1)})$ ist und $f_n^{(k)}$ konvergiert auf A_k. Wir benutzen nun das Cantorsche Diagonal-Verfahren:

$$\begin{array}{ccccc} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} & \cdots \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & \cdots & f_n^{(2)} & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \cdots & f_n^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Wir betrachten die Diagonalfolge $v_n = (f_n^{(n)})$. Da $(f_n^{(n)})_{n\geq k}$ Teilfolge von $(f_n^{(k)})$ ist, so konvergiert $(f_n^{(n)})$ auf A_k, also auf $A = \bigcup A_k$.

3. Schritt: Konvergiert (v_n) auf die dichte Menge A, so konvergiert v_n punktweise auf X. Sei $x \in X$ beliebig. Wähle $a \in A$ mit $d(x, a) < \delta(\varepsilon, x)$. Da $(v_n(a))$ konvergent ist, wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $m, n \geq N$ gilt $|v_n(a) - v_m(a)| \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$|v_n(x) - v_m(x)| \leq |v_n(x) - v_n(a)| + |v_n(a) - v_m(a)| + |v_m(a) - v_m(x)| . \leq 3\varepsilon$$

Daraus folgt, dass $(v_n(x))$ konvergent ist.

4. Schritt: Ist X kompakt und (v_n) gleichgradig stetig und punktweise konvergent, so ist (v_n) gleichmäßig konvergent. Sei $\varepsilon > 0$. Da X kompakt ist, existieren $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = \cup_{i=1}^N B_{\delta(\varepsilon, x_i)}(x_i)$, mit $\delta(\varepsilon, x)$ wie in (2). Für ein $x \in X$ und $k \in \{1, \ldots, N\}$ mit $x \in B_{\delta(\varepsilon, x_k)}(x_k)$

$$|v_n(x) - v_m(x)| \leq \underbrace{|v_n(x) - v_n(x_k)|}_{<\varepsilon} + |v_n(x_k) - v_m(x_k)| + \underbrace{|v_m(x_k) - v_m(x)|}_{<\varepsilon}$$

Es folgt

$$\|v_n - v_m\|_x \leq 2\varepsilon + \underbrace{\max_{1\leq k\leq n} |f_n(x_k) - f_m(x_k)|}_{<\varepsilon \text{ für alle } m,n \text{ groß genug}} \leq 3\varepsilon$$

Es folgt, dass (v_n) eine Cauchy–Folge ist in dem Banachraum $(\mathscr{C}(X), \|\cdot\|)$, also konvergent. $\square$

4.2.3. **Satz** (Montel/Stieltjes–Vitali). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, (f_n) eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge in $\mathcal{O}(D)$, d.h. für jedes $K \subset D$ kompakt gilt* $\sup_n \|f_n\|_K < \infty$. *Dann besitzt (f_n) eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei $z \in D$, $\overline{B_r(z)} \subset D$. Nach Annahme existiert $c > 0$ mit $\|f_n\|_{\overline{B_r(z)}} \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Cauchy–Abschätzungen 2.5.6 liefern:

$$\|f_n'\|_{\overline{B_{r/2(z)}}} \leq \frac{1}{(r/2)}\|f_n\|_K \leq \frac{2c}{r}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $w \in B_{r/2}(z)$ gilt dann (Schrankensatz)

$$|f_n(w) - f_n(z)| \leq \frac{2c}{r}|w - z|.$$

Dies zeigt, dass die Folge (f_n) gleichgradig stetig ist. Wer wenden nun den Satz von Arzela–Ascoli an. Sei $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ eine *Ausschöpfung von D mit kompakten Teilmengen*:

$$\forall p \in \mathbb{N}: \; K_p \subset D \text{ kompakt}, \; K_p \subset \mathring{K}_{p+1}, \text{ und } D = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} K_p\,.$$

Man kann K_p etwa so definieren:

$$K_p = \left\{z \in D : d(z, \partial D) \geq \frac{1}{p}\right\} \bigcap \overline{B_p(0)}\,.$$

Wähle eine Teilfolge $(f_n^{(1)})$ gleichmäßig konvergierend auf K_1. Aus $(f_n^{(1)})$ wähle eine Teilfolge $(f_n^{(2)})$ gleichmäßig konvergierend auf K_2, usw. Die Diagonalfolge $(f_n^{(n)})$ konvergiert dann auf jedem K_p, $p \in \mathbb{N}$, also auf jedem kompakten $K \subset D$. $\square$

21. Vorlesung, 12.07.2017

4.3. **Der Injektionssatz von Hurwitz.**

4.3.1. **Satz** (Hurwitz I). *Eine Folge $f_n \in \mathcal{O}(D)$ konvergiere lokal gleichmäßig im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ gegen $f \in \mathcal{O}(D)$. Es sei U beschränkt und offen mit $\overline{U} \subset D$, so dass f keine Nullstelle auf ∂U hat. Dann gibt es einen Index $n_U \in \mathbb{N}$, so dass alle Funktionen f, f_n mit $n \geq n_U$ in $\overline{U}$ gleich viele Nullstellen haben.*

Beweis:
Schritt 1: $U = B_r(z_0)$. Es gilt $\varepsilon = \min\{|f(z)| : z \in \partial U\} > 0$. $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\partial U \Rightarrow \exists n_U$, so dass $\|f_n - f\|_{\partial U} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_U \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \partial U$, $n \geq n_U$. Rouché $\rightsquigarrow$ Behauptung.
Schritt 2: U beliebig. $\overline{U}$ kompakt $\Rightarrow f$ hat in $\overline{U}$ nur endlich viele Nullstellen (Identitätssatz). Sie liegen alle in $U = \overline{U} \setminus \partial U$, es gibt also paarweise disjunkte Kreisscheiben $U_1, \ldots, U_k$ in U, so dass f in $K = \overline{U} \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_k)$ nicht verschwindet. Da $f_n \to f$ gleichmäßig auf K, sind fast alle f_n nullstellenfrei in K.
Schritt 1 $\rightsquigarrow$ für fast alle n gilt $N_{f_n}(0, U_j) = N_f(0, U_j)$ also $N_{f_n}(0, U) = N_f(0, U)$. □

4.3.2. **Satz** (Injektionssatz von Hurwitz). *Es sei $f_n \in \mathcal{O}(D)$ eine Folge von injektiven Funktionen, die in D lokal gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{O}(D)$ konvergiert. Dann ist f entweder konstant oder injektiv.*

Beweis:
Angenommen f ist weder injektiv noch konstant. Seien $a, b \in D$ mit $a \neq b$, $f(a) = f(b)$. Sei $r > 0$ mit $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$. Die Funktion $f - f(a)$ hat Nullstellen in a und b und ist nicht identisch Null. Nach 4.3.1 haben fast alle Funktionen $f_n - f(a)$ gleich viele Nullstellen in $B_r(a)$ und $B_r(b)$, d.h. f_n nimmt den Wert $f(a)$ in zwei verschiedenen Stellen an. Widerspruch. □

4.4. **Riemannscher Abbildungssatz.** Zwei Gebiete der komplexen Ebene heißen biholomorph äquivalent oder konform äquivalent, wenn es zwischen ihnen eine holomorphe bijektive Abbildung gibt. Eine Fundamentalfrage ist: Wann sind zwei Gebiete biholomorph äquivalent? Für manche spezielle Gebiete findet man eine biholomorphe Abbildung durch eine Möbiustransformation. Zum Beispiel sind die obere Halbebene $\mathbb{H}$ und die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ biholomorph biholomorph äquivalent, unter der Möbiustransformation, genannt Cayley-Abbildung,

$$\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}, \quad z \longmapsto \frac{z+i}{z-i}, \tag{4.1}$$

mit der Umkehrabbildung

$$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad z \longmapsto i\,\frac{z+1}{z-1}\,. \tag{4.2}$$

Hingegen sind $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ nicht biholomorph äquivalent, denn jede holomorphe Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{D}$ ist nach dem Satz von Liouville konstant.

Wie kommt man darauf, dass die Funktion (4.1) ein Kandidat für eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{H} \to \mathbb{D}$ ist? Wir wissen (Übungsblatt 2), dass Möbiustransformationen verallgemeinerte Kreislinien in $\widehat{\mathbb{C}}$ auf verallgemeinerte Kreislinien abbilden. Dabei heißt eine Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$ verallgemeinerte Kreislinie, falls sie entweder eine Kreislinie in $\mathbb{C}$ oder eine (nicht notwendig durch 0 gehende) Gerade vereinigt mit dem Punkt ∞ ist. Wir wissen auch, dass für je zwei Tripel (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) jeweils verschiedener Punkten in $\widehat{\mathbb{C}}$ genau eine Möbiustransformation M existiert mit $M(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$. Wir suchen also eine Möbiustransformation

$$M : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}},\ \ M(z) = \frac{az + b}{cz + d}\,, \tag{4.3}$$

die den Rand von $\mathbb{H}$, d. h. reelle Achse, in den Rand von $\mathbb{D}$, d. h. die Kreislinie, abbildet, und zwar so, dass $M(0) = -1$, $M(1) = -i$, $M(\infty) = 1$ (d. h. $\lim_{z\to\infty} M(z) = 1$). Diese Forderung an (4.3) führen sofort zu (4.1).

Wir bemerken nun, dass die Abbildungen $\mathbb{H} \to \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, $z \mapsto z/i = -iz$ und $\{z : \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}_-$, $z \longmapsto z^2$, also auch ihre Zusammensetzung

$$\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}_-,\ \ z \longmapsto -z^2\,, \tag{4.4}$$

biholomorph sind. Setzen wir (4.2) mit (4.4) zusammen, so erhalten wir eine biholomorphe Abbildung

$$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}_-,\ \ z \longmapsto \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\,, \tag{4.5}$$

Diese Abbildung ist bemerkenswert, indem sie die *beschränkte Einheitsscheibe* biholomorph auf auf die *Vollebene ohne die negative reelle Achse* abbildet. Eine verwandte Abbildung ist die *Koebe Abbildung*

$$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ z \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{4}\left(\frac{z+1}{z-1} + 1\right)^2,$$

die $\mathbb{D}$ biholomorph auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, \frac{1}{4}]$ abbildet.

Wann ist ein Gebiet D biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$? Da biholomorphe Abbildungen Homöomorphismen sind, und da $\mathbb{D}$ einfach zusammenhängt, so muss auch D einfach zusammenhängen. Sind nämlich D_1, D_2 homöomorphe Gebiete und hängt D_1 einfach zusammen, so ist auch D_2 einfach zusammenhängend. Ein Satz, der nach Felix Klein "zu den tiefsten und größten Erkenntnissen zu zählen ist, die in der Mathematik je erwachsen sind", besagt, dass D keinen weiteren Zwängen unterliegt.

4.4.1. **Satz** (Riemannscher Abbildungssatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene, einfach zusammenhängende Teilmenge, $D \neq \mathbb{C}$. Dann ist D biholomorph zu $\mathbb{D}$.*

Beweis: Nach Folgerung 3.3.9 hat ein einfach zusammenhändendes Gebiet die Quadrat-wurzel-Eigenschaft: Jede nullstellenfreie holomorphe Funktion hat eine holomorphe Quadratwurzel. Im Beweis benutzen wir nur die Quadratwurzel-Eigenschaft von D.

Wir nehmen also an, dass D die Quadratwurzel-Eigenschaft hat. Sei $a \in D$ fest. Betrachte die Familie

$$\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{O}(D) : f(D) \subset \mathbb{D}, f \text{ injektiv}, f(a) = 0\}.$$

Wir zeigen, dass

(1) $\mathcal{K} \neq \emptyset$,
(2) $\exists f \in \mathcal{K}$ mit $|f'(a)|$ maximal,
(3) $f \in \mathcal{K}$ mit $|f'(a)|$ maximal $\Rightarrow f(D) = \mathbb{D}$ und f ist biholomorph.

1. Schritt: Existenz holomorpher Injektionen. Wir zeigen, dass $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Sei $b \in \mathbb{C} \setminus D$. Die holomorphe Funktion $z \to z - b$ hat keine Nullstelle aud D. Folglich gibt es $g \in \mathcal{O}(D)$ mit $g(z)^2 = z - b$ für alle $z \in D$. Da g nicht konstant ist, so ist sie offen. Außerdem gilt

$$g(z) = \pm g(z') \Rightarrow g(z)^2 = g(z')^2 \Rightarrow z - b = z' - b \Rightarrow z = z'.$$

Insbersondere g injektiv und

$$\forall w \in \mathbb{C} : \ \{\pm w\} \not\subset g(D),$$

d. h. $g(D)$ enthält keine Spiegelpunkte. Sei $c \in g(D)$ (also $c \neq 0$) und $B_r(c) \subset g(D)$. Dann ist $B_r(-c) \subset \mathbb{C} \setminus g(D)$, also $g(D) \subset \mathbb{C} \setminus B_r(-c)$. Die holomorphe injektive Funktion

$$h : \mathbb{C} \setminus \{-c\} \to \mathbb{C}\,, \ \ h(z) = \frac{z - g(a)}{z + c} \cdot$$

erfüllt $h(g(a)) = 0$ und ist beschränt auf $\mathbb{C} \setminus B_r(-c)$, also auf $g(D)$. Sei

$$R > \sup\{|h(w)| : w \in \mathbb{C} \setminus B_r(-c)\}.$$

Dann ist $\frac{1}{R}(h \circ g) \in \mathcal{K}$.

2. Schritt: Die Extremalfunktion. Wir zeigen, dass

$$\exists f \in \mathcal{K} : \ \ |f'(a)| = \sup\{|g'(a)| : g \in \mathcal{K}\}.$$

Da $\mathcal{K} \neq \emptyset$ gilt $M := \{|g'(a)| : g \in \mathcal{K}\} \in [0, \infty]$. Sei $g \in \mathcal{K}$; g ist injektiv also $g'(a) \neq 0$ und $M \geq |g'(a)| > 0$. Außerdem $\|g\|_D < 1$ und für $r > 0$ mit $\overline{B_r(a)} \subset D$ gilt

$$|g'(a)| \leq \frac{1}{r}\|g\|_{\overline{B_r(a)}} < \frac{1}{r} < \frac{1}{d(a, \partial D)} \text{ also } M \leq \frac{1}{d(a, \partial D)}.$$

Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{K}$ mit $|f_n'(a)| \to M$, $n \to \infty$. Es gilt $\|f_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Stieltjes-Vitali gibt es eine konv. Teilfolge (v_n) mit $v_n \to f$ lokal gleichmäßig für $n \to \infty$. Satz von Weierstrass: $f \in \mathcal{O}(D)$ und $f_n' \to f'$ also $f(a) = 0$, $|f'(a)| = M$.

Wir zeigen, dass $f \in \mathcal{K}$. Es ist klar, dass $f(D) \subset \overline{\mathbb{D}}$ f ist aber nicht konstant ($|f'(a)| = M > 0$), also $f(D)$ ist offen und folglich $f(D) \subset \mathbb{D}$. Nach dem Injektionssatz von Hurwitz 4.3.2 ist f injektiv.

3. Schritt: Wir zeigen, dass $f(D) = \mathbb{D}$ und f biholomorph ist. f injektiv $\Rightarrow$ $\Omega = f(D) \subset \mathbb{D}$ offen und $f : D \to \Omega$ biholomorph. Insbesondere hat auch Ω die Quadratwurzel-Eigenschaft. Angenommen $\Omega \neq \mathbb{D}$. Wir benutzen dann das folgende

Lemma (Quadratwurzel-Verfahren von Koebe-Carathéodory). *Das Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{D}$ *habe die Quadratwurzel-Eigenschaft und* $0 \in \Omega$, $\Omega \neq \mathbb{D}$. *Dann gibt es* $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ *injektiv mit* $g(\Omega) \subset \mathbb{D}$, $g(0) = 0$, $|g'(0)| > 1$.

Betrachte dann $g \circ f \in \mathcal{K}$; es ist $|(g \circ f)'(a)| = |g'(0)| \cdot |f'(a)| > |f'(a)|$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von f.
Beweis des Lemmas: Sei $b \in \mathbb{D} \setminus \Omega$. Betrachte die Möbiustransformation

$$\varphi_b : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad \varphi_b(z) = \frac{z - b}{\overline{b}z - 1}.$$

$\varphi_b(z) \neq 0$ für $z \in \Omega$. Sei $h : \Omega \to \mathbb{C}$, $h^2(z) = \varphi_b(z)$, $z \in \Omega$. Es ist klar, dass $h(\Omega) \subset \mathbb{C}$ und man zeigt wie in (1), dass h injektiv ist. Setze

$$c = h(0), \quad g = \varphi_c \cdot h \in \mathcal{O}(\Omega).$$

g ist injektiv und $g(0) = \varphi_c(h(0)) = \varphi_c(c) = 0$. Wegen $h^2 = \varphi_b \Rightarrow 2h(0)h'(0) = \varphi_b'(0)$, $c^2 = h(0)^2 = \varphi_b(0) = -b$. Also

$$\begin{aligned} g'(0) = \varphi_c'(c) \cdot h'(0) = \varphi_c'(c) \cdot \frac{\varphi_b'(0)}{2c} &= \frac{(1-|c|^2)^{-1}(1-|b|^2)}{2c} \\ = \frac{(1-|c|^2)^{-1}(1-|c|^2)(1+|c|^2)}{2c} &= \frac{1+|c|^2}{2c} \end{aligned}$$

und $|g'(0)| > 1$, wegen $|c| \neq 1$. □

4.4.2. **Bemerkung.** Ist $\overline{D} \neq \mathbb{C}$, wähle $B_\varepsilon(b) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Dann ist die Funktion $D \ni z \to \frac{z-a}{z-b}$ holomorph und beschränkt auf D. Für $R > 0$ genügend groß ist: $D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z-a}{R(z-b)}$ ein Element in $\mathcal{K}$.

4.4.3. **Folgerung.** *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet* $D \subset \mathbb{C}$ *ist homöomorph zu der Einheitskreisscheibe.*

Beweis: Ist $D = \mathbb{C}$, so ist $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, $\varphi(z) = \frac{z}{1+|z|}$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{D}$. Ist $D \neq \mathbb{C}$, so gibt es sogar eine biholomorphe Abbildung $f : D \to \mathbb{D}$ (nach 4.4.1). □

Notiz. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es zu jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \to D$. Diese ist eine injektive holomorphe auf $\mathbb{D}$ und wird ***schlicht*** genannt. Zur Untersuchung schlichter Funktionen ist die Normierung $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ zweckmässig. Eine solche Funktion hat die Potenzreihenentwicklung $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$.

In einer Fußnote seines Werkes "Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln" aus dem Jahr 1916 stellte der Mathematiker Ludwig Bieberbach die folgende These auf:

4.4.4. **Bieberbachsche Vermutung.** Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{D}$ die ebene Einheitskreisscheibe bezeichnet, eine holomorphe, injektive Funktion mit der Potenzreihenentwicklung $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Dann gilt $|a_n| \leq n$ für alle $n \geq 2$.

Diese nach Bieberbach benannte Vermutung hat einige Jahrzehnte zahlreiche Mathematiker beschäftigt. Bieberbach selbst hat bewiesen, dass sie für den Fall $n = 2$ erfüllt ist. Der erste Beweis der Bieberbachsche Vermutung gelang Louis De Branges im Jahr 1984.

Die Koebe-Funktion

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \;\; f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n,$$

erfüllt die Gleichheit in der Bieberbachsche Vermutung.