

## 1. VORLESUNG, 18.04.2017

## 1. KOMPLEXE ZAHLEN UND FUNKTIONEN

## 1.1. Der Körper der komplexen Zahlen.

Die komplexe Ebene und die Riemannsche Zahlenkugel bilden den Grundbereich der Funktionentheorie; dort sind ihre Objekte, die analytischen Funktionen, definiert und dort haben sie ihre Werte.

Auf  $\mathbb{R}^2$  führen wir eine Addition und Multiplikation wie folgt ein:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (x, y) + (u, v) &:= (x + u, y + v) \\ (x, y) \cdot (u, v) &:= (xu - yv, xv + yu). \end{aligned}$$

1.1.1. **Satz.**  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  ist ein kommutativer Körper mit Nullelement  $(0, 0)$  und Einselement  $(1, 0)$ . Dieser Körper heißt **Körper der komplexen Zahlen**, bezeichnet mit  $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ .

Das Inverse von  $z = (x, y) \neq 0$  ist

$$z^{-1} := \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = (x, 0)$  hat die Eigenschaften

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad , \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad , \quad \varphi(1) = (1, 0) \quad ,$$

d.h.  $\varphi$  ist ein Körper-Homomorphismus.

Die komplexen Zahlen  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  bilden einen Körper mit der induzierten Addition und Multiplikation (1.1). Wir sagen, dass  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  ein *Unterkörper* von  $\mathbb{C}$  ist. Der Homomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  ist bijektiv, d.h. ein Isomorphismus. Wir *identifizieren* deshalb  $\mathbb{R}$  mit  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  und sagen, dass  $\mathbb{R}$  ein Unterkörper von  $\mathbb{C}$  ist.

Wir schreiben für  $(x, 0)$  kurz  $x$ , also 0 für  $(0, 0)$ , 1 für  $(1, 0)$ , usw.

1.1.2. **Definition.** Die (nicht-reelle) Zahl  $i = (0, 1)$  heißt **imaginäre Einheit**. Es gilt

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0^2 - 1^2, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Für  $z = (x, y)$  schreiben wir nun

$$z = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

Dann heißt  $x$  **Realteil** von  $z$ , und  $y$  heißt **Imaginärteil** von  $z$ , geschrieben  $\operatorname{Re} z := x$ ,  $\operatorname{Im} z := y$ . Man beachte, dass der Imaginärteil  $y$  reell ist. Zahlen der Form  $iy$  mit  $y \in \mathbb{R}$  heißen auch (rein) imaginär.

1.1.3. **Definition.** Die **konjugierte Zahl** zu  $z = x + iy$  ist  $\bar{z} := x - iy$ .

1.1.4. **Satz (Rechenregeln).** Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt:

- (i)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ .
- (ii)  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ ,  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$ .
- (iii)  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ,  $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ .

- (iv)  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$  für  $z = x + iy$ .  
 (v)  $\overline{\bar{z}} = z$ .

**1.1.5. Definition.** Für  $z \in \mathbb{C}$  heißt  $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$  der **Betrag** von  $z$ . Für  $z \in \mathbb{R}$  ist  $|z| = \sqrt{z^2}$  der übliche Betrag von reellen Zahlen.

**1.1.6. Satz** (Rechenregeln für den Betrag). Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt:

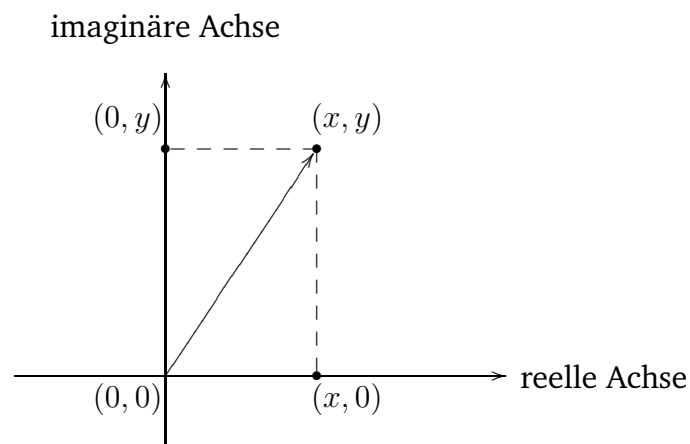
- (i)  $|z| \geq 0$ ;  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ .  
 (ii) Ist  $z \neq 0$ , so gilt  $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ .  
 (iii)  $|\bar{z}| = |z|$ .  
 (iv)  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ ,  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ .  
 (v)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ .  
 (vi)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (**Dreiecksungleichung**).  
 Die Gleichheit gilt genau dann, wenn  $z = 0$  (bzw.  $w = 0$ ) oder  $w/z \in \mathbb{R}_+$  (bzw.  $z/w \in \mathbb{R}_+$ ).  
 (vii)  $||z| - |w|| \leq |z - w|$  (**umgekehrte Dreiecksungleichung**).

**Beweis:** Zu (vi): Ist  $z + w = 0$ , so ist die Aussage klar, Ist  $z + w \neq 0$  so gilt:

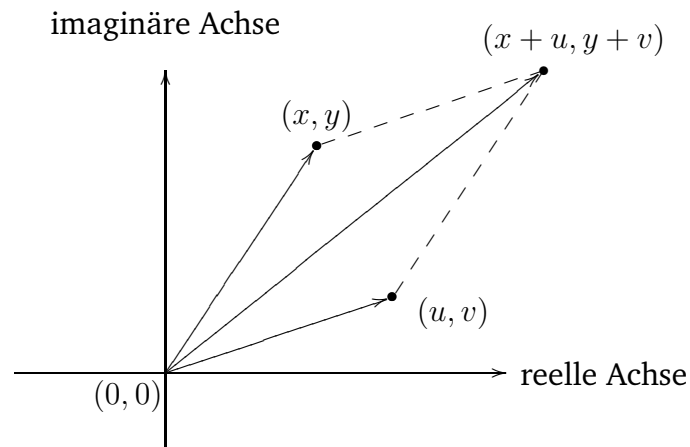
$$\frac{|z| + |w|}{|z + w|} = \left| \frac{z}{z + w} \right| + \left| \frac{w}{z + w} \right| \stackrel{(iv)}{\geq} \operatorname{Re} \frac{z}{z + w} + \operatorname{Re} \frac{w}{z + w} = \operatorname{Re} \frac{z + w}{z + w} = 1.$$

□

**1.1.7. Geometrische Deutung der komplexen Zahlen.** Wir veranschaulichen uns seit Gauß die komplexen Zahlen geometrisch als Punkte in einer Ebene mit rechtwinkligen Koordinaten, genannt **Gaußsche Zahlenbene** (oder als Vektoren mit Ursprung im Nullpunkt  $(0, 0)$  und Endpunkt in  $(x, y)$ ).



Die Addition komplexer Zahlen ist dann die übliche Vektoraddition nach der Parallelogrammregel.



$|z|$  ist der Euklidische Abstand des Punktes  $z = (x, y)$  zum Ursprung.

$\bar{z}$  ist die Spiegelung des Punktes  $z = (x, y)$  an der reellen Achse.

Die Ungleichung  $|z + w| \leq |z| + |w|$  ist genau die Dreiecksungleichung aus der Geometrie: Im Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten stets mindestens so groß wie die Länge der dritten Seite.

Wir wollen nun die Multiplikation geometrisch interpretieren. Wir erinnern die **Eulersche Formel**:

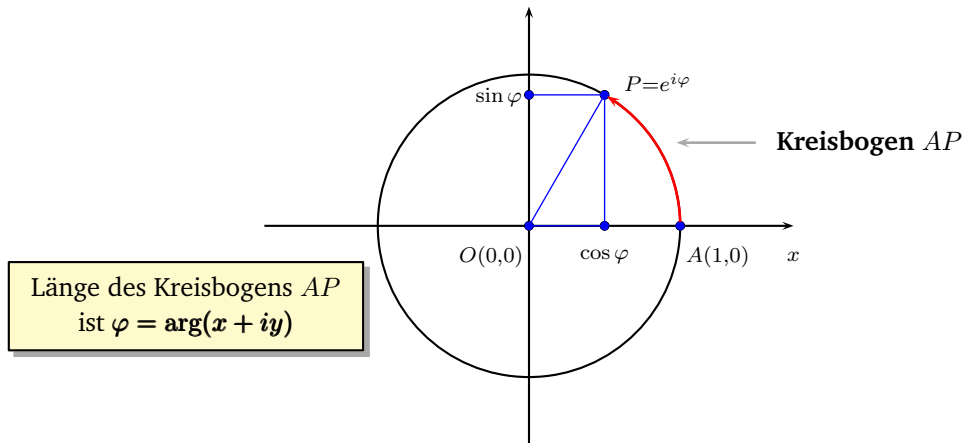
$$(1.2) \quad \boxed{e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \text{wobei } \cos \varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi}, \sin \varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}.}$$

Die Eulersche Formel ist eine der wichtigsten und schönsten der Mathematik. Wir werden sie später beweisen (sie erscheint übrigens schon in Analysis I). Um sie besser einzuschätzen, geben wir die geometrischen Definitionen von Sinus und Cosinus.

**1.1.8. Definition.** Sei  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Definiere  $(\cos_{\text{geom}} \varphi, \sin_{\text{geom}} \varphi)$  als die Koordinaten des Punktes  $P$  aus dem Einheitskreis, so dass die Bogenlänge des Kreisbogens  $AP$  (gemessen gegen den Uhrzeigersinn) gleich  $\varphi$  ist. Dann setze die Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  auf  $\mathbb{R}$  fort, als periodische Funktionen mit der Periode  $2\pi$ .

Diese Definition entspricht auch der Definition von Cosinus und Sinus als Ankathete/Hypotenuse und Gegenkathete/Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck.

**1.1.9. Satz.** Die Bogenlänge des Kreisbogens  $AP$  mit  $P = e^{i\varphi}$  ist  $\varphi$ . Daher stimmen die geometrischen und analytischen (Eulerschen) Definitionen von  $\cos$  und  $\sin$  überein.



**Beweis:** Im nächsten Satz sehen wir, dass der Kreisbogen  $AP$  durch  $c : [0, \varphi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $c(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$  parametrisiert werden kann. Dessen Bogenlänge ist

$$\int_0^\varphi |c'(t)| dt = \varphi.$$

da  $c'(t) = ie^{it}$ . □

So betrachtet bildet die Eulersche Formel eine Brücke zwischen den beiden Definitionen. Sie zeigt zum Beispiel, dass die geometrisch definierten trigonometrischen Funktionen analytisch sind.

#### 1.1.10. Satz (Parametrisierung der Kreislinie).

(i) Die Abbildung  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $p(\varphi) = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  ist ein Gruppenmorphismus der additiven Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$  auf die multiplikative Gruppe  $(S^1, \cdot)$  mit dem Kern  $2\pi\mathbb{Z}$ . Es gilt  $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2}$  genau dann, wenn  $\varphi_1 - \varphi_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ .

(ii) Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall der Länge  $2\pi$ . Dann ist  $p|_I : I \rightarrow S^1$  bijektiv und stetig. Ist  $a \in I$  ein Endpunkt von  $I$ , so ist die Umkehrung  $(p|_I)^{-1}$  stetig auf  $S^1 \setminus \{p(a)\}$  und unstetig in  $p(a)$ .

**Beweis:** Die Abbildung  $p$  ist ein Gruppenhomomorphismus wegen der Potenzregel  $e^{z+w} = e^z e^w$ . Es ist  $\ker p = \{\varphi : \cos \varphi = 1, \sin \varphi = 0\} = 2\pi\mathbb{Z}$ . Sei  $(x, y) \in S^1$ , d. h.  $x^2 + y^2 = 1$ . Wir suchen  $\varphi \in \mathbb{R}$ , mit  $\cos \varphi = x$ ,  $\sin \varphi = y$ . Die Abbildung  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  ist bijektiv und  $x \in [-1, 1]$ , setze also  $\varphi = \arccos x \in [0, \pi]$ . Für  $\varphi \in [0, \pi]$  ist  $\sin \varphi$  nicht-negativ, also  $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{y^2} = |y|$ . Ist  $y \geq 0$  so passt also die Lösung  $\varphi = \arccos x$ . Ist  $y < 0$ , so erfüllt  $\varphi = -\arccos x \in (-\pi, 0)$  beide Gleichungen. So haben wir gezeigt, dass  $p|_{(-\pi, \pi]} : (-\pi, \pi] \rightarrow S^1$  (also auch  $p$ ) surjektiv ist mit der Inverse

$$(p|_{(-\pi, \pi]})^{-1}(x + iy) = \begin{cases} \arccos(x), & y \geq 0, \\ -\arccos(x), & y < 0. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig auf  $S^1 \setminus \{-1\}$  und unstetig in  $-1$ . □

### 1.1.11. Definition.

(a) Die Funktion  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $p(\varphi) = e^{i\varphi}$  heißt die **Standardparametrisierung des Einheitskreises**  $S^1$ .

(b) Für  $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  heißt  $\varphi \in \mathbb{R}$  mit  $e^{i\varphi} = z/|z|$  ein **Argument** oder ein **Wert des Arguments** von  $z$ . Setze

$$\text{Arg} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad \text{Arg}(z) := \{\varphi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} = z/|z|\}.$$

$\text{Arg}(z)$  heißt die **Menge der Argumente** von  $z$ . Die einzige Zahl  $\arg(z)$  mit der Eigenschaft, dass

$$\text{Arg}(z) \cap (-\pi, \pi] = \{\arg(z)\}$$

heißt **das Argument** oder **Hauptwert des Arguments** von  $z$ . Der Zahl  $z = 0$  wird kein Argument zugeordnet.

(c) Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall der Länge  $2\pi$ . Die Abbildung  $\mathbb{C}^* \rightarrow I$ ,  $z \mapsto (p|_I)^{-1}(z/|z|)$  heißt ein **Zweig des Arguments**. Die Abbildung  $\arg : \mathbb{C}^* \rightarrow (-\pi, \pi]$ ,  $z \mapsto \arg(z)$  heißt **Hauptzweig des Arguments**.

Der Hauptzweig des Arguments ist so gewählt, dass  $\text{Im} \log(z) = \arg(z)$ , wobei  $\log$  der Hauptzweig des Logarithmus ist. Eine konkrete Formel für  $\arg$  ist gegeben durch

$$\arg : \mathbb{C}^* \rightarrow (-\pi, \pi], \quad \arg z = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\text{Re } z}{|z|}\right), & \text{Im } z \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{\text{Re } z}{|z|}\right), & \text{Im } z \leq 0, z \notin \mathbb{R}_-. \end{cases}$$

Dabei ist  $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$  die negative reelle Achse. Sei  $\mathbb{C}_- := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$  die entlang der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene. Dann ist  $\arg$  stetig auf  $\mathbb{C}_-$  und unstetig in allen Punkten von  $\mathbb{R}_-$ . Dort macht  $\arg$  einen Sprung von  $2\pi$ :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ \text{Im } z < 0}} \arg(z) = \arg(a) = \pi, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ \text{Im } z < 0}} \arg(z) = -\pi$$

1.1.12. **Satz.** Jedes  $z \in \mathbb{C}^*$  hat die Form

$$(1.3) \quad z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{mit } r = |z| \text{ und } \varphi \in \text{Arg}(z).$$

$P : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $(r, \varphi) \mapsto re^{i\varphi}$  ist bijektiv und stetig. Die Umkehrabbildung  $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi]$ ,  $z \mapsto (|z|, \arg(z))$  ist stetig auf  $\mathbb{C}_-$  und unstetig in allen Punkten der negativen reellen Achse  $\mathbb{R}_-$ .

Die Form (1.3) heißt Polarkoordinatendarstellung von  $z$  und  $(r, \varphi)$  heißen die **Polarkoordinaten** von  $z$ . Die Abbildung  $P$  heißt **Polarkoordinatenabbildung**.

Wir haben nun für  $z \in \mathbb{C}^*$  zwei Koordinatensysteme: die kartesischen Koordinaten  $(x, y) = (\text{Re } z, \text{Im } z)$  und die Polarkoordinaten  $(r, \varphi) = (|z|, \arg(z))$ . Für viele Probleme ist es vorteilhaft, die Polarkoordinaten zu benutzen.

Zum Beispiel ist die Multiplikation zweier in Polarkoordinaten  $z = |z|e^{i\varphi}$ ,  $w = |w|e^{i\psi}$  gegebener Zahlen besonders einfach: Es ist  $zw = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}$ . Die Multiplikationsregel für komplexe Zahlen lautet also: „Die Längen werden multipliziert,

die Argumente werden addiert“. Daraus folgt die **Moivresche Formel**:

$$\boxed{[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.}$$

Eine komplexe Zahl  $z$  heißt  **$n$ -te Einheitswurzel** ( $n \in \mathbb{N}$ ), falls  $z^n = 1$  gilt.

1.1.13. **Satz.** *Es gibt zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  genau  $n$  verschiedene  $n$ -te Einheitswurzeln, nämlich*

$$\zeta_\nu = e^{\frac{2\pi\nu}{n}i} = \cos \frac{2\pi\nu}{n} + i \sin \frac{2\pi\nu}{n}, \quad 0 \leq \nu \leq n-1.$$

*Sie liegen regelmäßig verteilt auf der Einheitskreislinie  $|z| = 1$  im Winkelabstand  $2\pi/n$ .*