

2. VORLESUNG, 24.04.2017

Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn X die *Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft* hat, d.h. wenn aus jeder offenen Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von X endlich viele i_1, \dots, i_k ausgewählt werden können so, dass schon $X = \bigcup_{r=1}^k V_{i_r}$. Die Familie $(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})$ heißt *Teilüberdeckung*, und die Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft kann auch so formuliert werden: Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung¹.

In \mathbb{C} gelten die Sätze von Bolzano-Weierstrass und Heine-Borel.

1.1.14. **Satz** (Bolzano-Weierstraß in \mathbb{C}). *Jede beschränkte Folge in \mathbb{C} besitzt einen Häufungswert.*

1.1.15. **Satz** (Heine-Borel). *Sei $K \subset \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *K ist kompakt, d.h. jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

(ii) *K ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in K hat eine in K konvergente Teilfolge.*

(iii) *K ist abgeschlossen und beschränkt.*

1.1.16. **Satz** (Satz vom Maximum und Minimum (Weierstrass)). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere kompakte Menge. Dann ist jede stetige Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt und ihr Absolutbetrag nimmt ihr Maximum und sein Minimum an, d. h. es gibt $\zeta_1, \zeta_2 \in K$ mit $|f(\zeta_1)| \leq |f(z)| \leq |f(\zeta_2)|$ für alle $z \in K$.*

Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung von X in zwei nichtleere disjunkte offene Teilmengen U, V gibt.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) *X ist zusammenhängend.*

(ii) *Ist $U \subset X$ nichtleer, offen und abgeschlossen, so gilt $U = X$.*

(iii) *Jede lokal-konstante Funktion auf X ist konstant.*

(iv) *Jede stetige Funktion von X nach $\{0, 1\}$ ist konstant.*

Sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ heißt *Weg*. Der Punkt $\gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt* und der Punkt $\gamma(b)$ heißt *Endpunkt* von γ . Wir sagen auch, dass γ *verbindet* $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$.

Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn je zwei Punkte durch einen Weg verbunden werden können.

1.1.17. **Satz**. *Ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist zusammenhängend.*

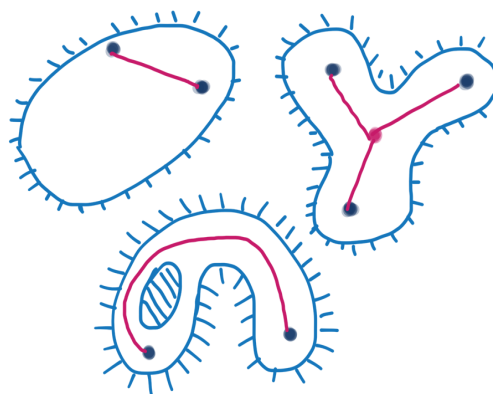
Die Umkehrung ist falsch (siehe Übungsblätter).

Sei nun X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *zusammenhängend* (bzw. *wegzusammenhängend*), falls A versehen mit der Teilraumtopologie zusammenhängend (bzw. *wegzusammenhängend*) ist. Wir interessieren uns in der Funktionentheorie für Teilmengen von \mathbb{C} . Auf einer Teilmenge von \mathbb{C} betrachte wir

¹ „Teil“ heißt nicht, dass nur ein Teil von X überdeckt wird, sondern dass man nur eine Teilmenge der Indizes benutzt.

stets die Teilraumtopologie induziert durch die standard Topologie von \mathbb{C} . Somit können wir über zusammenhängende (bzw. wegzusammenhängende) Teilmengen von \mathbb{C} reden. Eine offene und zusammenhängende Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**.

Für $z, w \in \mathbb{C}$ heißt $[z, w] = \{(1-t)z + tw : t \in [0, 1]\}$ die *Strecke* von z nach w . Eine Menge $A \in \mathbb{C}$ heißt **konvex**, falls für alle $z, w \in A$ gilt $[z, w] \in A$. Eine Menge $A \in \mathbb{C}$ heißt **sternförmig**, falls es ein $z \in A$ gibt, so dass für alle $w \in A$ gilt $[z, w] \in A$. Jede konvexe Menge ist sternförmig, jede sternförmige Menge ist wegzusammenhängend (also zusammenhängend). Kreisscheiben und Halbebenen sind konvex (insbesondere die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$). Die geschnittene Ebene $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, wobei $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, ist nicht konvex aber sternförmig.



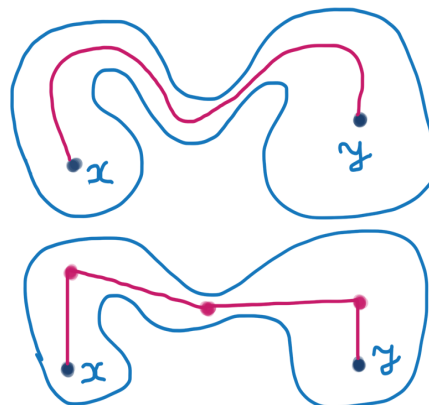
Konvex, sternförmig, wegzusammenhängend...

1.1.18. Satz. Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) D ist zusammenhängend (d. h. D ist ein Gebiet).

(ii) D ist wegzusammenhängend.

(iii) Für jede $x, y \in D$ gibt es einen Streckenzug $[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{k-1}, x_k] \subset D$ wobei $x_0 = x$ und $x_k = y$.



Beliebiger Weg und Streckenzug zwischen x und y

1.1.19. Definition (Wegekomponente). Sei X ein topologischer Raum. Zwei Punkten x, y heißen *wege-äquivalent*, falls sie durch einen Weg verbunden werden können. Dies ist eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen heißen **Wegekomponenten** von X . Der Raum X ist disjunkte Vereinigung seiner Wegekomponenten.

1.1.20. Satz.

- (i) Die Wegekomponenten einer offenen Menge in \mathbb{C} sind offen (also Gebiete).
(ii) Eine offene Menge in \mathbb{C} hat höchstens abzählbar viele Wegekomponenten.

1.1.21. Bemerkung. Sei X ein topologischer Raum. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen A von X , die $x \in X$ enthalten, heißt **Zusammenhangskomponente** $X(x)$ von x . Die Wegekomponenten einer offenen Menge in \mathbb{C} sind offen und stimmen mit den Zusammenhangskomponenten überein. Deshalb sprechen wir auch kurz einfach von **Komponenten**.

1.2. Riemannsche Sphäre.

Wir ergänzen \mathbb{C} durch ein (ideales) Element $\infty \notin \mathbb{C}$ und setzen $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\widehat{\mathbb{C}}$ heißt die **erweiterte Zahlenebene**.

Wir führen eine Topologie auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ein: $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ heißt offen genau dann, wenn $U \cap \mathbb{C}$ offen ist und falls $\infty \in U$, gibt es $M > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} \subset U$. Eine Menge $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \in U$ ist offen genau dann, wenn $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ kompakt in \mathbb{C} ist. Für eine Folge (z_n) in $\widehat{\mathbb{C}}$ gilt $z_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, genau dann, wenn $|z_n| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$.

Setze $S^2 = \{(w, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3 : |w|^2 + t^2 = 1\}$. Mit Hilfe der stereographischen Projektion definiere

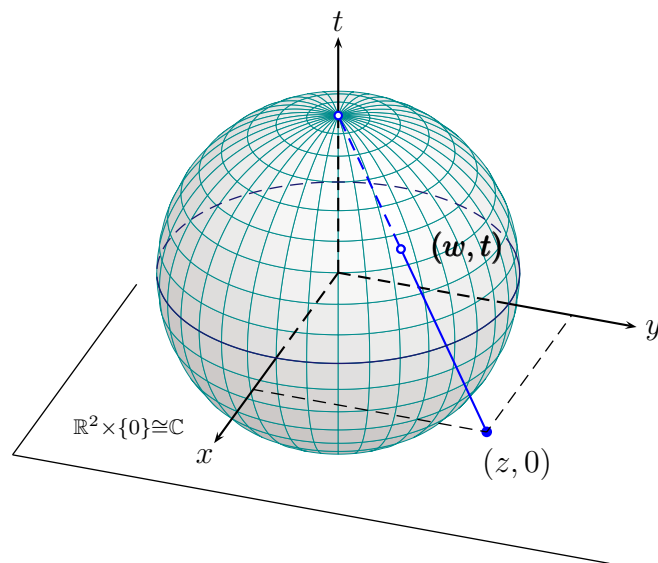
$$\sigma : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad \sigma(w, t) = \begin{cases} \frac{w}{1-t}, & (w, t) \neq (0, 1) \\ \infty, & (w, t) = (0, 1) =: N \end{cases}$$

(Man setzt die stereographische Projektion fort zu einer Bijektion von S^2 auf $\widehat{\mathbb{C}}$ durch $\sigma(N) = \infty$.) Die Umkehrung ist gegeben durch

$$\sigma^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2, \quad \sigma^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right), & z \neq \infty \\ N, & z = \infty \end{cases}$$

1.2.1. Satz. σ ist ein Homöomorphismus.

Deshalb betrachten wir S^2 als ein Modell für $\widehat{\mathbb{C}}$ und nennen $\widehat{\mathbb{C}}$ auch **Riemannsche Sphäre**.



Erweiterung der algebraischen Operationen:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} a \cdot \infty &= \frac{a}{0} = \infty, \quad \text{für } a \neq 0 \\ a \pm \infty &= \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad \text{für } a \neq \infty \\ \infty + \infty &= \infty \end{aligned}$$

Nicht definiert sind $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.