3. VORLESUNG, 26.04.2017

1.3. **Potenzreihen, Exponentialfunktion, Logarithmus.**

1.3.1. **Definition.** Eine Funktionenreihe $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ heißt ***Potenzreihe*** mit Koeffizienten a_n und Entwicklungspunkt z_0. Der ***Konvergenzradius*** der Reihe ist

$$R := \sup\big\{t \in [0,\infty) : (|a_n|t^n) \text{ beschränkt}\big\} \in [0,\infty]\,.$$

Wir verabreden, dass $B_R(z_0) := \mathbb{C}$, falls $R = \infty$.

1.3.2. **Satz.**
(a) *Die Reihe ist in der Kreisscheibe $B_R(z_0)$ absolut konvergent.*
(b) *Die Reihe ist in jeder Kreisscheibe $B_\rho(z_0)$ mit $\rho < R$ normal (also auch gleichmäßig) konvergent.*
(c) *Die Reihe ist für $|z| > R$ divergent.*

$B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ heißt ***Konvergenzbereich*** der Potenzreihe. Die Potenzreihe definiert eine Funktion $P : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz in allen $B_\rho(z_0)$ mit $\rho < R$ ist P stetig.
Für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ wird die *Supremumsnorm* durch

$$\|f\|_D := \sup\big\{|f(z)| : z \in D\big\} \in [0,\infty]\,.$$

eingeführt. Eine Reihe $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ von Funktionen $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *normal konvergent*, falls $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_D$ konvergiert. Konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ normal, so konvergiert sie auch gleichmäßig. Konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ gleichmäßig und sind f_n stetig in D, so ist auc die Summe $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ der Reihe stetig in D,

1.3.3. **Satz.** *Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$. Dann gilt:*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,, \qquad \text{(Cauchy-Hadamard–Formel)} \tag{1.5}$$

und

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{1.6}$$

falls der Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert.

1.3.4. **Definition.** Die ***Exponentialreihe*** ist die Potenzreihe

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Der Konvergenzradius ist nach (1.6) $R = \infty$, da $a_n = 1/n!$ und $|a_n/a_{n+1}| = n+1$. Die Exponentialreihe definiert also eine Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}\,, \tag{1.7}$$

genannt ***Exponentialfunktion***.

Es gilt

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \qquad \text{(Eulersche Zahl)}.$$

Mit Hilfe des Satzes vom Cauchy-Produkt (Analysis I, 3.3.6) erhalten wir die ***Funktionalgleichung*** (***Additionstheorem***) ***der Exponentialfunktion***:

(1.8) $$\boxed{\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,.}$$

Es ist klar, dass $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$, für $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \in \mathbb{R}$ für $z \in \mathbb{R}$, $|\exp(z)| = 1$, für $z \in i\mathbb{R}$, $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$, für $z \in \mathbb{C}$. Wegen $\exp(0) = 1$, folgt aus (1.8), dass

(1.9) $$\exp(-z) = \exp(z)^{-1} = \frac{1}{\exp(z)}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Die Gleichung (1.8) besagt, dass $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Aus (1.8), (1.9) ergibt sich leicht, dass $\exp(r) = e^r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Die Exponentialfunktion stimmt für rationale Zahlen mit Potenzen von e überein. Dies motiviert die folgende Definition.

1.3.5. **Definition.** Für $z \in \mathbb{C}$ sind die komplexen Potenzen von e definiert als

$$\boxed{e^z := \exp(z)}\,.$$

Damit wird die Funktionalgleichung zur ***Potenzregel***:

(1.10) $$e^{z+w} = e^z\, e^w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,.$$

Wir verwenden beide Schreibweisen, e^z und $\exp(z)$.

Die trigonometrischen Funktionen wurden in der Vorlesung Analysis I ausführlich untersucht. Sie sind Abkömmlinge der Exponentialfunktion, die Mutter vieler interessanter Funktionen. Ihre Eigenschaften setzen wir als bekannt voraus.

1.3.6. **Definition** (Euler). Sei $z \in \mathbb{C}$. Definiere

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\,, \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\,,$$
$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})\,, \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})\,.$$

Es folgt (durch Einsetzen der Potenzreihen-Darstellung von e^{iz} und e^{-iz})

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \qquad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n}$$

Alle diese Reihen haben Konvergenzradius ∞, da die Exponentialreihe Konvergenzradius ∞ hat.
Die Definition impliziert sofort

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z\,.$$

Dies ist i.A. nicht die Zerlegung in Real- und Imaginärteil von e^{iz}. Wenn aber $\varphi \in \mathbb{R}$, so gilt $\cos\varphi, \sin\varphi \in \mathbb{R}$ und wir erhalten die ***Eulersche Formel*** (1.2):

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \qquad \text{wobei } \cos\varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi},\ \sin\varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}.} \tag{1.11}$$

1.3.7. **Satz.** *Die Exponentialabbildung* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *ist eine surjektive und periodische Abbildung mit Periode* $2\pi i$. *Für* $z \in \mathbb{C}^*$ *gilt* $\exp^{-1}(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z) =: \operatorname{Log}(z)$. *Die Einschränkung* $\exp : \{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\} \to \mathbb{C}^*$ *ist stetig und bijektiv. Deren Umkehrung, gegeben durch*

$$\log : \mathbb{C}^* \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}\,, \quad z \mapsto \log|z| + i\arg z\ ,$$

ist stetig auf $\mathbb{C}_-$ *und unstetig auf* $\mathbb{R}_-$. *Für alle reellen Zahlen* $a \in \mathbb{R}_-$ *gilt*

$$\lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z>0}} \log(z) = \log(a) = \log|a| + i\pi\,, \qquad \lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z<0}} \log(z) = \log|a| - i\pi\ ,$$

d.h. $\log$ *macht beim Überqueren der negativen reellen Achse einen „Sprung von* $2\pi i$*“.*

1.3.8. **Definition.**
(a) Sei $z \in \mathbb{C}^*$. Eine Zahl $w \in \exp^{-1}(z)$ (d.h. eine Zahl, die die Gleichung $e^w = z$ erfüllt) heißt ***ein Logarithmus*** (oder ***Wert des Logarithmus***) von z. Die Zahl $\log(w)$ ist ein Logarithmus von z und heißt ***Hauptwert des Logarithmus*** von z.
(b) Eine stetige Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ heißt ***Logarithmusfunktion*** oder ***Zweig des Logarithmus*** in G, wenn gilt $e^{l(z)} = z$ für alle $z \in G$, d.h. wenn l eine stetige Umkehrung von $\exp$ ist. Die soeben eingeführte lokale Umkehrung

$$\log : \mathbb{C}_- \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

ist stetig und heißt ***Hauptzweig des Logarithmus***. Sie ist eine komplexe Fortsetzung des gewöhnlichen reellen (natürlichen) Logarithmus $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

1.3.9. **Bemerkung.** Aus Sicht der reellen Analysis ist die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ein lokaler $\mathscr{C}^\infty$ Diffeomeorphismus und sogar eine Überlagerung. Die Abbildung $\log : \mathbb{C}_- \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ist eine $\mathscr{C}^\infty$ lokale Umkehrung von $\exp$.

2. Holomorphe Funktionen

2.1. Definition und erste Eigenschaften.

2.1.1. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ***komplex differenzierbar*** in $z_0 \in D$, wenn

$$f'(z_0) := \frac{df}{dz}(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{in } \mathbb{C} \text{ existiert.} \tag{2.1}$$

Diese Zahl heißt dann die (komplexe) ***Ableitung*** von f in z_0. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ***holomorph*** in D, falls f komplex differenzierbar in allen Punkten $z \in D$ ist; f heißt ***holomorph in*** $z_0 \in D$, wenn f holomorph in einer offenen Umgebung von z_0 ist.

Diese Definition erhalten wir durch Übertragung der Definition der Differenzierbarkeit in einer reellen Veränderlichen. Auf gleiche Weise wie in der reellen Analysis zeigt man:

2.1.2. **Lemma.** *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*
(i) f ist komplex differenzierbar in z_0
(ii) Es gibt $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\rho : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{z\to z_0} \frac{\rho(z)}{z-z_0} = 0$ und

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + \rho(z)$$

(iii) Es gibt $L \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ mit $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + o(|z - z_0|)$, $z \to z_0$.
In diesem Falle gilt $f'(z_0) = \lambda$ und $L(v) = f'(z_0) \cdot v$ für $v \in \mathbb{C}$.

Dabei bezeichnet $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ den Raum der $\mathbb{C}$–linearen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

Sei nun $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, wobei $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Wir identifizieren f mit einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto ((x, y), v(x, y))$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \supset D \arrow[r, "z \longmapsto f(z)"] \arrow[d, "z \mapsto (x,y)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "z \mapsto (x,y)"] \\
\mathbb{R}^2 \supset D \arrow[r, "(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Die Funktion f heißt reell-differenzierbar, wenn $L \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ existiert mit $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + o(|z - z_0|)$, $z \to z_0$. Die Abbildung L ist das Differential von f in z_0 und wird bezeichnet mit $L = df(z_0)$. Ist f reell-differenzierbar in z_0, so existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\,,$$

und

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,dy\,.$$

Dabei sind

$$dx\,, dy : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad dx(z) = dx(x + iy) = x\,, \quad dy(z) = dy(x + iy) = y\,.$$