4. Vorlesung, 03.05.2017

2.1.3. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) f ist komplex-differenzierbar in z_0,
(ii) f ist reell-differenzierbar in z_0 und $df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$-linear,
*(iii) f ist reell-differenzierbar in z_0 und erfüllt zusätzlich die **Cauchy-Riemann-Gleichungen**:*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0} \tag{2.2}$$

d.h.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \tag{2.3}$$

In diesem Falle gilt

$$\boxed{df(z_0)(v) = f'(z_0)\cdot v\,, \quad \textit{für } v \in \mathbb{C}.} \tag{2.4}$$

Beweis: (i) $\iff$ (ii) ist klar, da $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \subset \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.
Zu (ii) $\iff$ (iii): $df(z_0) \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ mit $df(z_0)(z) = \lambda\cdot z \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ mit

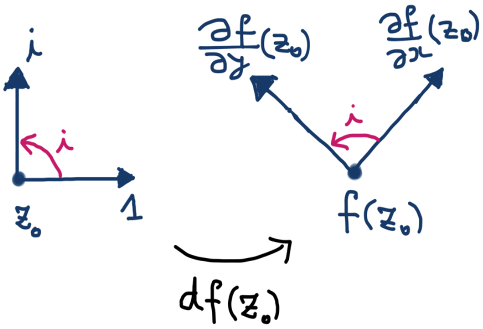
$$df(z_0)\cdot 1 = \lambda\,, \quad df(z_0)\cdot i = i\lambda\,.$$

d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "z\mapsto\lambda\cdot z"] \arrow[d, "z\mapsto(x{,}y)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "z\mapsto(x{,}y)"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "df(z_0)"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Wir wissen aus Analysis II, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0)\cdot e_1$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0)\cdot e_2$, wobei $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$. Durch den Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x+iy$ werden e_1 und e_2 auf 1 und i abgebildet. Es folgt

$$df(z_0)\cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\,, \quad df(z_0)\cdot i = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,.$$



Also $df(z_0) \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \iff$ (2.2). Wenn wir Realteil und Imaginärteil von (2.2) betrachten, erhalten wir (2.3). $\square$

Ist $f'(z_0) \neq 0$ so ist die lineare Abbildung $df(z_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine *Ähnlichkeitstransformation*: sie entspricht eine Streckung mit dem Faktor $|f'(z_0)|$ zusammengesetzt mit einer Rotation von Winkel $\arg f'(z_0)$.
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ reell-diffbar in $z_0 \in D$. Das Differential von f in z_0 ist

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$$

wobei $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ ist. $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ ist 2-dimensional mit Basis $\{dx, dy\}$.

Betrachte die folgenden Unterräume:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) &:= \{\ell : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \ \ell \ \ \mathbb{C}\text{–linear}\}\\ \mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) &:= \{\ell : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \ \ell \ \ \mathbb{C}\text{–antilinear}\}\end{aligned}$$

(ℓ $\mathbb{C}$–antilinear $:\iff$ ℓ $\mathbb{R}$–linear und $\ell(\lambda z) = \overline{\lambda}\ell(z)$ für $\lambda, z \in \mathbb{C}$)

Eine Basis in $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ ist $\{dz\}, dz = dx + idy$, und eine Basis in $\mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ ist $\{d\overline{z}\}, d\overline{z} = dx - idy$. Es gilt

$$\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) = \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \oplus \mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \ .$$

Zu $\ell \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, $\ell = a\,dx + b\,dy$, gibt es eine eindeutig bestimmte Zerlegung
$\ell = \ell_1 + \ell_2$ mit $\ell_1 \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, $\ell_2 \in \mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$:
Wegen

$$dx = \frac{dz + d\overline{z}}{2} \quad , \quad dy = \frac{dz - d\overline{z}}{2i}$$

$$\begin{aligned}\ell = adx + bdy &= a\frac{dz + d\overline{z}}{2} + b\frac{dz + d\overline{z}}{2i}\\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(a - ib)dz}_{=:\ell_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(a + ib)d\overline{z}}_{=:\ell_2} \ .\end{aligned}$$

Für $\ell = df(z_0), a = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ folgt die Zerlegung in $\mathbb{C}$–lineare und $\mathbb{C}$–antilineare Komponenten von $df(z_0)$:

$$\boxed{df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)d\overline{z}.}$$

wobei

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big). \tag{2.5}$$

Wir erhalten erneut:

f ist $\mathbb{C}$-differenzierbar in z_0 $\iff$ f ist $\mathbb{R}$-differenzierbar in z_0 & $df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$–linear

$\iff$ f ist $\mathbb{R}$-differenzierbar in z_0 & die $\mathbb{C}$–antilineare Komponente von $df(z_0)$ verschwindet

$\iff$ f ist $\mathbb{R}$-differenzierbar in z_0 und $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0}$

(**Cauchy-Riemannsche-Gleichungen**)

Ist f komplex-diferrenzierbar, so gilt nach (2.2), (2.5)

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0)\cdot 1 = f'(z_0). \tag{2.6}$$

Wenn wir z und $\overline{z}$ als Variablen betrachten und eine Funktion

$$f(x,y) = f\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\Big)$$

nach z und $\overline{z}$ mittels Kettenregel ableiten, erhalten wir die Formel (2.5). Dies bedeutet, dass wir $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ durch formelles Differenzieren nach den Variablen z und $\overline{z}$ erhalten.

Dies erleichtert viele Rechnungen. Z.B.

$$\frac{\partial}{\partial z}z^n = nz^{n-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}z^n = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}|z|^2 = \frac{\partial}{\partial z}(z\overline{z}) = \overline{z}.$$

Die Variablen z und $\overline{z}$ sind sicherlich abhängig voneinander, aber beim Differenzieren nach den konjugiert komplexen Variablen z und $\overline{z}$ darf man so tun, als ob z und $\overline{z}$ unabhängige Variable seien. Die Cauchy-Riemannsche-Gleichungen kann man so deuten: Holomorphe Funktionen sind unabängig von $\overline{z}$ und hängen nur von z ab.

Einige leichte Folgerungen aus Def. 2.1.1:

2.1.4. **Folgerung.** *Ist f komplex-differenzierbar in z_0, so ist f stetig in z_0.*

2.1.5. **Folgerung.** *Ist D ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = 0$, für alle $z \in D$, so ist f konstant.*

Beweis: f holomorph $\Rightarrow$ f reell-differenzierbar und $df(z) = f'(z)dz = 0$, für alle $z \in D$. Nach dem Konstanzkriterium (Skript 9.4.2; Königsberger 2, Kap. 2, §2.2.) ist f konstant. $\square$

Zusatz. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) f lokal-konstant (d.h. konstant in jeder Zusammenhangskomponente),
(ii) f holomorph und $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$.

Auf völlig gleiche Weise wie im Reellen beweist man den folgenden Satz.

2.1.6. **Satz** (Rechenregeln für die Ableitung)**.** *Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$. Dann sind $f + g$, λf $(\lambda \in \mathbb{C})$, fg und falls $f'(z_0) \neq 0$ auch $1/f$ in z_0 komplex-differenzierbar und es gilt:*

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0) \quad , \quad (\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f^2(z_0)}$$

2.1.7. **Beispiel.**
(i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist holomorph, $(z^n)' = nz^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$.
(ii) Polynome $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, sind holomorph, und $P'(z) = na_n z^{n-1} + \ldots + a_1$, $z \in \mathbb{C}$.
(iii) Eine rationale Funktion ist definiert als Quotient zweier Polynome $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, $Q \not\equiv 0$: $\quad R : \mathbb{C} \setminus \{z : Q(z) = 0\} \to \mathbb{C}$, $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$,
R ist holomorph auf seinen Definitionsbereich.
(iv) Sei $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

Sei $P : B_R(0) \to \mathbb{C}, P(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann ist P holomorph und es gilt

$$P'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \ , \quad \text{d.h.}$$

eine Potenzreihe darf im Kovergenzbereich gliedweise differenziert werden.

Beweis: Sei $z_0 \in B_R(0)$. Wähle $\rho < R$ mit $z_0 \in B_\rho(0)$. Wir stellen fest:

- Die Funktionenreihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ konvergiert in $B_\rho(0)$.
- Die Reihe der Differentiale

$$\sum_{n\geq 0} d(a_n z^n) = \sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1} dz = \Big(\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}\Big) dz$$

konvergiert gleichmäßig in $B_\rho(0)$, da $\sum\limits_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ Konvergenradius R hat.

Daraus folgt, dass P reell-differenzierbar in $B_\rho(0)$ ist, also auch in z_0 und

$$dP(z_0) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\Big) dz \ .$$

$dP(z_0)$ ist deshalb $\mathbb{C}$–linear, P ist komplex-differenzierbar und $P'(z_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$.

□

(v) Nach (iv) sind $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)$$

$$\cos'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(z)$$

und analog

$$\sin'(z) = \cos(z)$$

2.1.8. **Satz** (Kettenregel)**.** *Seien $D, G \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f : D \to G$ komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$, g komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$, g komplex-differenzierbar in $w_0 = f(z_0) \in G$. Dann ist $g \circ f$ komplex-differenzierbar in z_0 und gilt*

$$\boxed{(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)} \ .$$

Insbesondere ist $g \circ f$ holomorph, wenn f und g holomorph sind.

Beweis: $g \circ f$ ist reell-differenzierbar und $d(g \circ f)(z_0) = dg(w_0) \circ df(z_0)$ (Kettenregel für Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, siehe Skript 9.1.8 oder Königsberger 2, Kap. 2, §3.1). Nun sind $dg(w_0)$ und $df(z_0)$ $\mathbb{C}$–linear, also auch $d(g \circ f)(z_0) \Rightarrow g \circ f$ komplex-differenzierbar. Außerdem ist $df(z_0)$ die Multiplikation mit $f'(z_0)$, $dg(w_0)$ die Multiplikation mit $g'(w_0)$, also $dg(w_0) \circ df(z_0)$ die Multiplikation mit $g'(w_0) \cdot f'(z_0)$, d.h. $d(g \circ f)(z_0) = dg(w_0) \circ df(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)\, dz$. Aber $d(g \circ f)(z_0) = (g \circ f)'(z_0)\, dz$. Es folgt $(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)$. □

2.1.9. **Satz.** *Seien $D, G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to G$, so dass*

(i) *f holomorph,*
(ii) *f Homöomorphismus, und*
(iii) *$f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.*

Dann ist auch f^{-1} holomorph und $\boxed{(f^{-1})'(w) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(w))}}$ *für alle $w \in G$.*

Beweis: Sei $w \in G$ fest, $z_0 := f^{-1}(w_0)$. Sei (w_n) eine Folge in G, $w_n \to w_0$, $n \to \infty$ und $w_n \neq w_0$. Dann gilt $z_n := f^{-1}(w_n) \to f^{-1}(w_0) =: z_0$ und $z_n \neq z_0$. Deshalb

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w_0)}{w_n - w_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_0}{f(z_n) - f(z_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)} \ .$$

Die Folge (w_n) ist beliebig $\Rightarrow$ Behauptung. □

2.1.10. **Beispiel.** Sei $\ell : D \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion. Dann ist ℓ holomorph und es gilt

$$\ell'(z) = \frac{1}{z} \text{ für alle } z \in D\,.$$

2.1.11. **Definition.** Eine Abbildung $f : D \to \widetilde{D}$ zwischen zwei offenen Mengen heißt ***biholomorph***, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} holomorph sind. Zwei offene Teilmengen $D, \widetilde{D} \subset \mathbb{C}$ heißen biholomorph, falls eine biholomorphe Abbildung $f : D \to \widetilde{D}$ existiert.