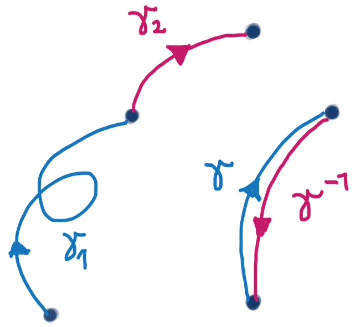
5. VORLESUNG, 08.05.2017

2.2. Komplexe Kurvenintegrale.

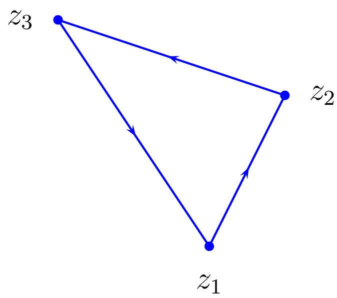
2.2.1. **Definition.** ***Eine (parametrisierte) Kurve*** ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$; $\gamma(a), \gamma(b)$ heißen ***Anfangspunkt*** und ***Endpunkt*** von γ,
$|\gamma| := \{\gamma(t) : a \le t \le b\}$ heißt ***Träger*** oder ***Spur*** von γ.
Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ Kurven, so dass der Endpunkt von γ_1 der Anfangspunkt von γ_2 ist, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Die ***zusammengesetzte Kurve*** ist $\gamma_1 * \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , \ t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(a_2 - b_1 + t) & , \ t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

Eine Kurve heißt ***stückweise*** $\mathscr{C}^1$, wenn man sie in endlich viele $\mathscr{C}^1$–Kurven zerlegen kann, d.h. wenn gilt $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sind $\mathscr{C}^1$–Kurven.
Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve, so heißt $\gamma^{-1} : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a+b-t)$ die ***umorientierte Kurve***.



2.2.2. **Beispiel.** (i) Für $z, w \in \mathbb{C}$ sei $[z,w]$ die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (1-t)\,z + tw$, d.h. die *Strecke* von z nach w. Es ist $[z,w]^{-1} = [w,z]$.
Für $z_1, z_2, \ldots, z_m$ bezeichnen wir mit $[z_1, z_2, \ldots, z_m] = [z_1, z_2] * [z_2, z_3] * \ldots * [z_{m-1}, z_m]$ den *Streckenzug* von z_1 nach z_m über $z_2, \ldots, z_{m-1}$. Ein Streckenzug der Form $[z_1, z_2] * [z_2, z_3] * [z_3, z_1]$ heißt *Dreieckskurve*.



(ii) Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Dann definiert $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ einen positiv orientierten *Kreisbogen*. Wenn $b = a + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist, so wird der Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ genau k–mal durchgelaufen.

Wir schreiben $\partial B_r(z_0)$ für den positiv orientierten Kreis $\gamma : [a, a + 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Kurven sind Abbidungen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, der Träger $|\gamma|$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Man muss zwischen Kurve und Träger unterscheiden. Zum Beispiel haben $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = z_0 + re^{it}$, $\gamma_2(t) = z_0 + re^{ikt}$ denselben Träger (der Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$) aber $\gamma_1 \neq \gamma_2$ falls $k \neq 1$. Bei γ_1 wird der Kreis einmal durchgelaufen, bei γ_2 wird der Kreis k–mal durchgelaufen.

2.2.3. **Definition.** Für $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, $f = u + iv$, setze

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b f dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

2.2.4. **Lemma.** *Für $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig gilt:*

(i)

$$\int_a^b (f+g)\,dt := \int_a^b f dt + \int_a^b g dt,\ \int_a^b (\lambda f)\,dt = \lambda\int_a^b f dt,\ \lambda \in \mathbb{C},$$

(ii)

$$\Big|\int_a^b f dt\Big| \le \int_a^b |f| dt \le \sup_{[a,b]} |f| \cdot (b-a)$$

(iii) *Sei $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $F'(t) = \frac{dF}{dt}(t) = f(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f dt = F(b) - F(a).$$

(iv) $f_n \to f$ *gleichmäßig in* $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f_n dt \to \int_a^b f dt \ {\scriptstyle (n\to\infty)}$.

Beweis:

Zu (ii): Sei $z := \int_a^b f dt$. Ist $z = 0$, so ist (ii) klar. Falls $z \neq 0$, schreibe $z = |z|e^{i\varphi}$, also

$$|z| = ze^{-i\varphi} = \int_a^b fe^{-i\varphi} dt = Re\int_a^b fe^{-i\varphi} dt = \int_a^b \underbrace{\mathrm{Re}(fe^{-i\varphi}) dt}_{\le |fe^{-i\varphi}| = |f|} \le \int_a^b |f| dt$$

Zu (iii): Hauptsatz für Real- und Imaginärteil.

□

2.2.5. **Definition.** Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein $\mathscr{C}^1$–Kurve, $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig. Das ***Kurvenintegral*** von f längs γ ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_\gamma f dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt. \tag{2.7}$$

Dabei ist die Ableitung von $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ definiert durch $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Das ***Integral nach Bogenlänge*** von f ist definiert durch

$$\int_\gamma f|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Die ***Länge der Kurve*** γ ist

$$\ell(\gamma) := \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Ist γ eine stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve, $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m$ eine Zerlegung in $\mathscr{C}^1$–Kurven, $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig, setze

$$\int_\gamma f dz := \int_{\gamma_1} f dz + \ldots + \int_{\gamma_m} f dz \,. \tag{2.8}$$

Dieser Wert ist von der Zerlegung unabhängig.

Zusammenhang mit reelen Kurvenintegrale: die Formel (2.7) ist eigentlich das Kurvenintegral der 1–Form $f(z)\,dz = (u+iv)(dx+idy) = (u\,dx-v\,dy)+i(v\,dx+u\,dy)$ wie sie in Analysis III eingeführt wurde. Dort ist das Kurvenintegral einer 1-Form $\omega = p\,dx + q\,dy$ längs $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ definiert durch $\int_\gamma \omega := \int_a^b \gamma^\star(\omega)$, wobei $\gamma^\star(\omega) := p(\gamma(t))x'(t)\,dt + q(\gamma(t))y'(t)\,dt$ der Pullback von ω durch γ ist. Es gilt also $\gamma^\star(f\,dz) = f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ und (2.7) lautet $\int_\gamma f\,dz := \int_a^b \gamma^\star(f\,dz)$.

2.2.6. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt ***Stammfunktion*** von f, falls F holomorph ist und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$.

2.2.7. **Lemma.**
(i) Beide Typen von Integralen sind linear, z.B.

$$\int_\gamma (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,dz = \lambda_1 \int_\gamma f_1\,dz + \lambda_2 \int_\gamma f_2\,dz.$$

(ii) Formel (2.8) *gilt auch, wenn $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ nur stückweise $\mathscr{C}^1$ sind.*
(iii) ***Invarianz gegenüber Parametertransformationen:*** *Sei $\tau : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ bijektiv und stetig differenzierbar, so dass $\tau'(s) \neq 0$ für alle $s \in [\alpha, \beta]$ (Parametertransformation) und sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine $\mathscr{C}^1$–Kurve. Dann gilt:*

$$\int_{\gamma\circ\tau} f\,dz = \int_\gamma \operatorname{sgn}(\tau') f\,dz \,.$$

Insbesondere

$$\int_{\gamma^{-1}} f\,dz = -\int_\gamma f\,dz \,.$$

(iv) ***Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Kurvenintegral:***
Ist f stetig in $D, F : D \to \mathbb{C}$ Stammfunktion von f, so gilt

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}$$

Insbesondere gilt für jede geschlossene stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.}$$

Hat eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion, so hängt das Kurvenintegral von $f(z)\,dz$ nur von Anfangs– und Endpunkt der Kurve und nicht vom Verlauf der Kurve ab, d.h. sind $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to D$ stückweise $\mathscr{C}^1$– Kurven mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, so gilt

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

*Diese Eigenschaft heißt **Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals von** $f dz$.*
(v) Sei f stetig auf dem Träger der stückweisen $\mathscr{C}^1$–Kurve γ.
*Dann gilt die **Standardabschätzung für Integrale**:*

$$\boxed{\Big|\int_\gamma f dz\Big| \leq \int_\gamma |f||dz| \leq \sup_{|\gamma|} |f| \cdot \ell(\gamma).}$$

Beweis:

Zu (iii):

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\tau} f dz &= \int_\alpha^\beta (f\circ\gamma\circ\tau)(s)\cdot(\gamma\circ\tau)'(s)\,ds \\
&= \int_\alpha^\beta (f\circ\gamma)\underbrace{(\tau(s))}_{t}\,\gamma'\underbrace{(\tau(s))}_{t}\underbrace{\tau'(s)\,ds}_{dt} \underset{\tau(s)=t}{=} \int_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} (f\circ\gamma)(t)\cdot\gamma'(t)dt \\
&= \operatorname{sgn}(\tau')\int_a^b (f\circ\gamma)(t)\gamma'(t)\,dt = \operatorname{sgn}(\tau')\int_\gamma f dz
\end{aligned}$$

$$\text{weil } \int_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} = \begin{cases} \int_a^b & \text{falls } \tau \text{ wachsend d.h. } \tau' > 0 \\ \int_b^a = -\int_a^b & \text{falls } \tau \text{ fallend d.h. } \tau' < 0\,. \end{cases}$$

Zu (iv):

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{dF}{dz}(\gamma(t))\cdot\frac{d\gamma}{dt}(t)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t)\,dt = F(\gamma(b) - F(\gamma(b))
\end{aligned}$$

nach 2.2.4

Zu (v):

$$
\begin{aligned}
|\int_\gamma f dz| &= |\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt| \leq \underbrace{\int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt}_{=:\int_\gamma |f|\,|dz|} \\
&\leq \sup_{t\in[a,b]} |f\circ\gamma(t)| \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \\
&= \sup_{z\in|\gamma|} |f(z)|\,\ell(\gamma)
\end{aligned}
$$

□

2.2.8. **Satz** (Hauptsatz über Kurvenintegrale)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:*

(i) *f besitzt eine Stammfunktion,*
(ii) *$\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jede geschlossene stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve,*
(iii) *das Kurvenintegral von $f dz$ ist wegunabhängig.*

Zusatz. *Ist das der Fall, so ist eine Stammfunktion durch*

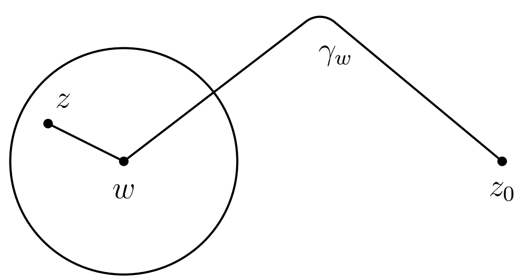
$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta =: \int_{z_0}^z f(\zeta)\,d\zeta$$

gegeben, wobei z_0 beliebig und fest ist und γ_z eine beliebige stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve von z_0 nach z in D ist. (z.B. ein Streckenzug; existiert stets, da D Gebiet).

Beweis: (i)⇒(ii) folgt aus Lemma 2.2.7(iv).
(ii)⇒(iii) Seien γ, δ Kurven mit demselben Anfangs- und Endpunkt. Dann ist $\gamma*\delta^{-1}$ geschlossen und

$$0 = \int_{\gamma*\delta^{-1}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\delta^{-1}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\delta f(z)\,dz\ .$$

(iii)⇒(i) Sei $w \in D$ beliebig, fest. D offen $\Rightarrow \exists\, \rho > 0 : B_\rho(w) \subset D$.
Sei γ_w ein Streckenzug von z_0 nach w in D. Dann ist $\gamma_w * [w, z]$ ein Streckenzug von z_0 nach z in D für alle $z \in B_\rho(w)$.



Es folgt

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_w * [w,z]} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{\gamma_w} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{[w,z]} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= F(w) + f(w)(z-w) + \int\limits_{[w,z]} (f(\zeta) - f(w))\, d\zeta\,, \text{ da } \int\limits_{[w,z]} d\zeta = z - w\,. \end{aligned}$$

f stetig in $w \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta \in (0, \varrho)\ \forall z \in B_\delta(w) : |f(z) - f(w)| < \varepsilon$.
Wegen der Standardabschätung 2.2.7(v) gilt:

$$\Big| \int_{[w,z]} (f(\zeta) - f(w))\, d\zeta \Big| \leq \varepsilon \int_{[w,z]} |d\zeta| = \varepsilon |z - w|$$

und daher

$$\lim_{z \to \infty} \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = f(w)$$

also ist F komplex-differenzierbar in w und $F'(w) = f(w)$. $\square$