6. Vorlesung, 10.05.2017

2.2.9. **Beispiel.** Die Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z}$ hat keine Stammfuntkion, da

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \,. \tag{2.9}$$

Hätte f eine Stammfunktion, so wäre das Integral Null. ↯
Die Formel (2.9) folgt aus der Definition des Integrals:

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt = 2\pi i \,.$$

Die Funktion f hat aber eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\zeta} : r \geq 0\}$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$, nämlich Zweige des Logarithmus. Das Integral (2.9) hängt eng mit der Unstetigkeit des Logarithmus zusammen. Wir können nämlich mit Hilfe der Stammfunktion $\log$ rechnen

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{e^{i(-\pi+\varepsilon)}}^{e^{i(\pi-\varepsilon)}} \frac{dz}{z} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \big(\log e^{i(\pi-\varepsilon)} - \log e^{i(-\pi+\varepsilon)} \big) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \big(i(\pi - \varepsilon) - i(-\pi + \varepsilon) \big) \\ &= 2\pi i \,.\end{aligned}$$

Das Integral ist also genau der Sprung des Logarithmus beim Überqueren des negativen reellen Achse.

2.2.10. **Definition.** Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt ***Sterngebiet***, wenn es $z_0 \in D$ gibt, so dass für alle $z \in D$ gilt $[z_0, z] \subset D$.
Wir sagen, dass D Sterngebiet bzgl. z_0 ist oder z_0 ein Zentrum von D ist.

(i) Jede komplexe offene Menge ist Sterngebiet. Dabei ist jeder Punkt der Menge ein Zentrum.
(ii) $\mathbb{C}_-$ ist Sterngebiet (aber nicht konvex). Die Zentren von $\mathbb{C}_-$ sind alle $z \in \mathbb{R}_+$.
(iii) $\mathbb{C}^*$ oder ein Kreisring sind nicht Sterngebiete.

2.2.11. **Satz** (Hauptsatz über Kurvenintegrale in Sterngebieten). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet bzgl. $z_0 \in D, f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Äquivalent:*

(i) *f besitzt eine Stammfunktion,*
(ii) *$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$ für den Rand $\partial\Delta$ jedes Dreiecks $\Delta \subset D$ mit z_0 als Ecke.*
(iii) *Das Kurvenintegral von $f dz$ ist wegunabhängig. Ist das der Fall, so ist eine Stammfunktion durch*

$$F : D \to \mathbb{C} \,, \quad F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, d\zeta$$

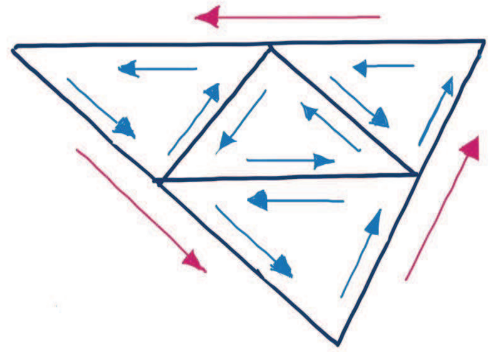
gegeben.

Beweis: Analog zu 2.2.8. In (iii)⇒(ii) setze $\gamma = [z_0, z]$. □

2.3. **Der Cauchysche Integralsatz.** Unser Ziel ist zu zeigen, dass eine holomorphe Funktion f in einem Sterngebiet die Beziehung $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ erfüllt, für alle geschlossenen stückweisen $\mathscr{C}^1$–Kurven. Insbesondere besitzt f Stammfunktionen.

2.3.1. **Lemma** (von Goursat). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in D. Dann gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für den Rand $\partial\Delta$ jedes abgeschlossenen Dreiecks $\Delta \subset D$.*

Beweis: Hier betrachten wir auf dem Rand eines Dreiecks stets die Orientierung gegen den Uhrzeigersinn. Sei $\Delta \subset D$ ein Dreieck. Setze $\alpha := |\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz|$. Seien $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$ die vier Teildreiecke die aus Δ durch Seitenhalbierung hervorgehen.



Dann ist

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^{(j)}} f\,dz\,.$$

(Die Integrale über gemeinsame Seiten heben sich wegen der umgekehrten Orientierung auf.) Sei Δ_1 dasjenige der Dreiecke $\Delta^{(j)}$, für das der Betrag des Integrals maximal wird. Daraus folgt

$$\alpha \leqslant 4 \cdot \Big| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz \Big|\,.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Teilungsprozesses erhalten wir Dreiecke

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \quad \text{mit} \quad \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \qquad (*)$$

und $\alpha \leqslant 4^n |\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz|$, $\ell(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}\,\ell(\partial\Delta)$, $\operatorname{diam}\Delta_n = 2^{-n}\operatorname{diam}\Delta, n \in \mathbb{N}$. Die Mengen Δ_n sind kompakt. Aus $(*) \Rightarrow \exists\, z_0 \in D$ mit $z_0 \in \bigcap_{n\geq 1} \Delta_n$. f ist in z_0 komplex-differenzierbar, daher gibt es $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$ und

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varphi(z)(z - z_0)\,.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|\varphi(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in B_\delta(z_0)$. Da $\partial\Delta_n$ geschlossen sind, gilt:

$$\int_{\partial\Delta_n} dz = 0 \quad , \quad \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)\, dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz = f(z_0) \int_{\partial\Delta_n} dz + f'(z_0) \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)\, dz + \int_{\partial\Delta_n} \varphi(z)(z - z_0)\, dz$$
$$= \int_{\partial\Delta_n} \varphi(z)(z - z_0)\, dz$$

Wegen $z_0 \in \Delta_n, \operatorname{diam} \Delta_n \to 0$ gilt $\Delta_n \subset B_\delta(z_0)$ für großes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\alpha \leqslant 4^n \cdot \Big| \int_{\partial\Delta_n} \varphi(z)(z - z_0)\, dz \Big| \leqslant 4^n \cdot \varepsilon \cdot \sup_{z \in \Delta_n} |z - z_0| \cdot \ell(\partial\Delta_n)$$
$$= 4^n \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{diam} \Delta_n\, \ell(\partial\Delta_n) = 4^n \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{diam} \Delta \frac{1}{2^n} \cdot \ell(\partial\Delta_n)$$
$$= \varepsilon \cdot \operatorname{diam} \Delta \cdot \ell(\partial\Delta)$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\alpha = 0$. $\square$

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Diameter einer Teilmenge $A \subset X$ ist definiert durch $\operatorname{diam} A := \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}$. Für ein Dreieck in der Ebene ist der Diameter gleich die Länge der längsten Seite.

Satz. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und K_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge nichtleerer kompakter Mengen, so dass $K_{n+1} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.*

Zum Beweis: Sei $z_n \in K_n$ beliebig gewählt. Die Folge $(z_n)_{n \geqslant 1}$ gehört zur kompakten Menge K_1. Wegen Folgenkompaktheit von K_1, hat $(z_n)_{n \geqslant 1}$ einen Häufungspunkt $z_0 \in K_1$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist dann z_0 einen Häufungspunkt der Folge $(z_n)_{n \geqslant m}$ in K_m. Da K_m abgeschlossen ist, so gilt $z_0 \in K_m$, also $z_0 \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m$.

7. Vorlesung, 15.05.2017

2.3.2. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ für alle geschlossenen stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurven in D. Insbesondere besitzt f eine Stammfunktion in D.*

Beweis: Folgt aus 2.3.1 und 2.2.9. $\square$

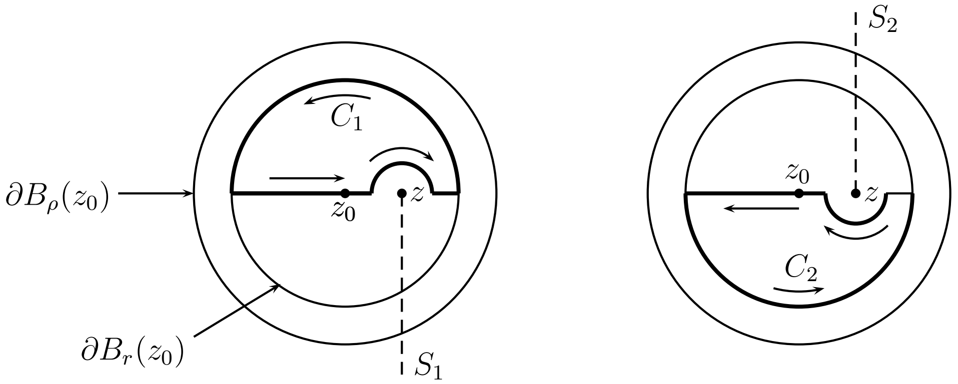
2.3.3. **Satz** (Cauchysche Integralformel). *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in der offenen Menge D. Wenn*

$$\overline{B_r(z_0)} \subset D \tag{2.10}$$

ist, so gilt :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad \textit{für } z \in B_r(z_0)} \tag{2.11}$$

Beweis: Sei $z \in B_r(z_0)$ gegeben. Wegen (2.10) gibt es $\rho > r$ mit $B_\rho(z_0) \subset D$. Sei C_1 die durch Pfeile



angeordnete Kurve, wo der kleine Halbkreis um z den genügend kleinen Radius $\delta > 0$ hat. Entsprechend ist C_2 konstruiert durch Spiegelung um $\overline{z_0 z}$.
Sind S_1, S_2 senkrechte Halbgeraden zu $\overline{z_0 z}$ durch z, so sind $H_j = B_\rho(z_0) \setminus S_j$ Sterngebiete ($j = 1, 2$). Die Funktionen $H_j \ni \zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ sind holomorph und $\int_{C_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$, $j = 1, 2$, nach 2.3.2 Wir addieren beide Integrale und dabei zerlegen wir sie in Strecken- und Halbkreisintegrale. Die Anteile über die Strecken heben sich wegen der verschiedenen Orientierungen auf:

$$0 = \int\limits_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}\,,$$

$$\int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} := \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z+\delta e^{it})}{\delta e^{it}} i\delta e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z+\delta e^{it})dt$$

$$= \underbrace{i \int\limits_0^{2\pi} [f(z+\delta e^{it}) - f(z)]\, dt}_{\to 0\ (\delta \to 0)} + \underbrace{i \int\limits_0^{2\pi} f(z)dt}_{=2\pi i f(z)} ,$$

weil

$$\Big| \int_0^{2\pi} [f(z+\delta e^{it}) - f(z)]dt \Big| \le \max_{t\in[0,2\pi]} |f(z+\delta e^{it}) - f(z)| \cdot 2\pi \longrightarrow 0 \ , \quad \delta \to 0 \ .$$

□

Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Die *Windungszahl (Umlaufzahl)* ist

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

und gibt an, wie oft die Kurve γ den Punkt z im positiven Sinn umläuft. Z.B.

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \ , \ \gamma(t) = e^{ikt} \ , \ k \in \mathbb{Z} \quad \rightsquigarrow \quad n(\gamma, 0) = k \ .$$

Es gilt $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$. Beweis: Zerlege $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_m = b$, so dass $\gamma_k := \gamma|_{[c_{k-1},c_k]} : [c_{k-1}, c_k] \to U_k$, wobei ein Zweig des Logarithmus $\ell_k : U_k \to \mathbb{C}$ auf U_k existiert. Dann gilt $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m$ und

$$2\pi i \cdot n(\gamma, z) = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^m [\ell_k(\gamma(c_k)) - \ell_k(\gamma(c_{k-1}))]$$

$$= \underbrace{\ell_m(\gamma(c_m)) - \ell_1(\gamma(c_0))}_{\in 2\pi i\mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{m-1} \underbrace{[\ell_k(\gamma(c_k)) - \ell_{k+1}(\gamma(c_k))]}_{\in 2\pi i\mathbb{Z}} ,$$

da für zwei Zweige ℓ_1, ℓ_2 des Logarithmus gilt $\ell_1(z), \ell_2(z) \in \log|z| + i \arg z + 2\pi i\mathbb{Z}$.

2.3.4. **Satz** (allgemeine Cauchy-Formel). *Sei D ein Sterngebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine geschlossene stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve und $z \in D \setminus |\gamma|$. Dann gilt:*

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Beweis: Schreibe

$$(*) \qquad \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} \ .$$

Nach Definition ist $\int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} = 2\pi i \cdot n(\gamma, z)$. Definiere

$$g_z : D \to \mathbb{C}, \quad g_z(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \ne z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z \ . \end{cases}$$

g_z ist holomorph in $D \setminus \{z\}$ und stetig in D. Das Lemma von Goursat und der Cauchysche Integralsatz sind noch gültig (siehe Übungsblatt 4, 1a). Also

$$\int_\gamma g_z(\zeta) d\zeta = 0$$

und das erste Integral in $(*)$ verschwindet. □

Für $\gamma = \partial B_r(z_0)$ gilt

$$n(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & , \quad z \in B_r(z_0) \\ 0 & , \quad z \notin \overline{B_r(z_0)} \,, \end{cases}$$

also

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in B_r(z_0) \\ 0 & , \quad z \notin \overline{B_r(z_0)} \,. \end{cases}$$

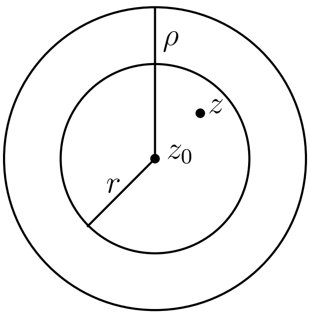
2.3.5. **Satz** (Potenzreihenentwicklungssatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in D$ und $\rho = d(z_0, \partial D) := \inf\limits_{z \in \partial D} |z - z_0| > 0$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{für alle } z \in B_\rho(z_0) \,,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \quad \textit{für alle } r \in (0, \rho) \,. \tag{2.12}$$

Beweis: Sei $z \in B_\rho(z_0)$. Wähle $r \in (|z - z_0|, \rho)$.



Dann ist $\overline{B_r(z_0)} \subset B_\rho(z_0)$ und die Cauchysche Integralformel impliziert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \,.$$

Nun ist

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}$$

und $|z - z_0| < r = |\zeta - z_0|$, also $\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1$. Somit gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \; .$$

Diese Funktionenreihe konvergiert normal und daher gleichmäßig für $\zeta \in \partial B_r(z_0)$, da

$$\sup_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n < \infty \; .$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \cdot (z - z_0)^n \; . \end{aligned}$$

(Wir können Integral und Summe vertauschen wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe.) □