

## 7. VORLESUNG, 15.05.2017

**2.3.2. Satz** (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete). Sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Sterngebiet und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  für alle geschlossenen stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurven in  $D$ . Insbesondere besitzt  $f$  eine Stammfunktion in  $D$ .

**Beweis:** Folgt aus 2.3.1 und 2.2.9. □

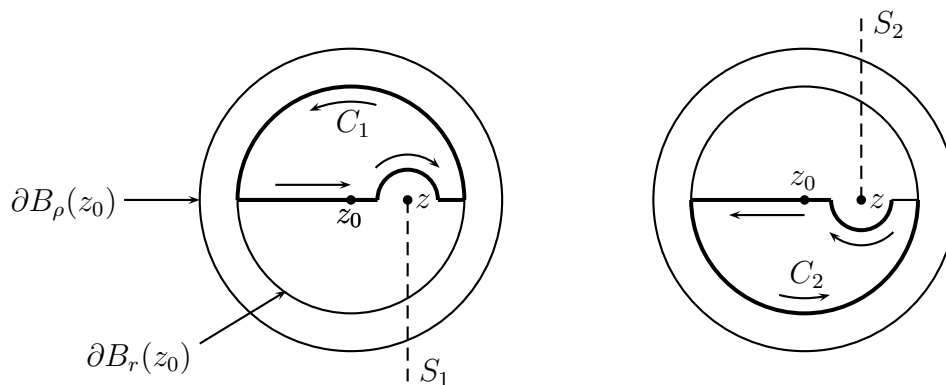
**2.3.3. Satz** (Cauchysche Integralformel). Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in der offenen Menge  $D$ . Wenn

$$(2.10) \quad \overline{B_r(z_0)} \subset D$$

ist, so gilt :

$$(2.11) \quad \boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \text{für } z \in B_r(z_0)}$$

**Beweis:** Sei  $z \in B_r(z_0)$  gegeben. Wegen (2.10) gibt es  $\rho > r$  mit  $B_\rho(z_0) \subset D$ . Sei  $C_1$  die durch Pfeile



angeordnete Kurve, wo der kleine Halbkreis um  $z$  den genügend kleinen Radius  $\delta > 0$  hat. Entsprechend ist  $C_2$  konstruiert durch Spiegelung um  $\overline{z_0 z}$ .

Sind  $S_1, S_2$  senkrechte Halbgeraden zu  $\overline{z_0 z}$  durch  $z$ , so sind  $H_j = B_\rho(z_0) \setminus S_j$  Sterngebiete ( $j = 1, 2$ ). Die Funktionen  $H_j \ni \zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  sind holomorph und  $\int_{C_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$ ,  $j = 1, 2$ , nach 2.3.2. Wir addieren beide Integrale und dabei zerlegen wir sie in Strecken- und Halbkreisintegrale. Die Anteile über die Strecken heben sich wegen der verschiedenen Orientierungen auf:

$$0 = \int_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \int_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= \int_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} := \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \delta e^{it})}{\delta e^{it}} i \delta e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it}) dt \\ &= i \underbrace{\int_0^{2\pi} [f(z + \delta e^{it}) - f(z)] dt}_{\rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0)} + i \underbrace{\int_0^{2\pi} f(z) dt}_{= 2\pi i f(z)}, \end{aligned}$$

weil

$$\left| \int_0^{2\pi} [f(z + \delta e^{it}) - f(z)] dt \right| \leq \max_{t \in [0, 2\pi]} |f(z + \delta e^{it}) - f(z)| \cdot 2\pi \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

□

Sei  $\gamma$  eine geschlossene Kurve in  $\mathbb{C}$  und  $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ . Die *Windungszahl (Umlaufzahl)* ist

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

und gibt an, wie oft die Kurve  $\gamma$  den Punkt  $z$  im positiven Sinn umläuft. Z.B.

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{ikt}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \rightsquigarrow \quad n(\gamma, 0) = k.$$

Es gilt  $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ . **Beweis:** Zerlege  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b$ , so dass  $\gamma_k := \gamma|_{[c_{k-1}, c_k]} : [c_{k-1}, c_k] \rightarrow U_k$ , wobei ein Zweig des Logarithmus  $\ell_k : U_k \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $U_k$  existiert. Dann gilt  $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_m$  und

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot n(\gamma, z) &= \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^m [\ell_k(\gamma(c_k)) - \ell_k(\gamma(c_{k-1}))] \\ &= \underbrace{\ell_m(\gamma(c_m)) - \ell_1(\gamma(c_0))}_{\in 2\pi i \mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{m-1} \underbrace{[\ell_k(\gamma(c_k)) - \ell_{k+1}(\gamma(c_k))]}_{\in 2\pi i \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

da für zwei Zweige  $\ell_1, \ell_2$  des Logarithmus gilt  $\ell_1(z), \ell_2(z) \in \log |z| + i \arg z + 2\pi i \mathbb{Z}$ .

**2.3.4. Satz (allgemeine Cauchy-Formel).** Sei  $D$  ein Sterngebiet,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $\gamma$  eine geschlossene stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve und  $z \in D \setminus |\gamma|$ . Dann gilt:

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

**Beweis:** Schreibe

$$(*) \quad \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}.$$

Nach Definition ist  $\int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} = 2\pi i \cdot n(\gamma, z)$ . Definiere

$$g_z : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad g_z(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z. \end{cases}$$

$g_z$  ist holomorph in  $D \setminus \{z\}$  und stetig in  $D$ . Das Lemma von Goursat und der Cauchysche Integralsatz sind noch gültig (siehe Übungsblatt 4, 1a). Also

$$\int_{\gamma} g_z(\zeta) d\zeta = 0$$

und das erste Integral in (\*) verschwindet. □

Für  $\gamma = \partial B_r(z_0)$  gilt

$$n(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & , \quad z \in B_r(z_0) \\ 0 & , \quad z \notin \overline{B_r(z_0)}, \end{cases}$$

also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in B_r(z_0) \\ 0 & , \quad z \notin \overline{B_r(z_0)}. \end{cases}$$

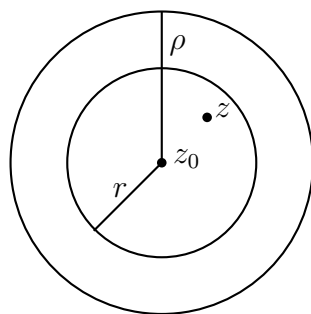
**2.3.5. Satz (Potenzreihenentwicklungssatz).** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $z_0 \in D$  und  $\rho = d(z_0, \partial D) := \inf_{z \in \partial D} |z - z_0| > 0$ . Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in B_{\rho}(z_0),$$

wobei

$$(2.12) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{für alle } r \in (0, \rho).$$

**Beweis:** Sei  $z \in B_{\rho}(z_0)$ . Wähle  $r \in (|z - z_0|, \rho)$ .



Dann ist  $\overline{B_r(z_0)} \subset B_{\rho}(z_0)$  und die Cauchysche Integralformel impliziert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nun ist

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}$$

und  $|z - z_0| < r = |\zeta - z_0|$ , also  $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1$ . Somit gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Diese Funktionenreihe konvergiert normal und daher gleichmäßig für  $\zeta \in \partial B_r(z_0)$ , da

$$\sup_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{|z - z_0|}{r} \right)^n < \infty.$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

(Wir können Integral und Summe vertauschen wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe.) □