8. VORLESUNG, 22.05.2017

2.3.6. **Folgerung.** *Sei D offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

(i) *f ist beliebig oft komplex–differenzierbar, d.h. man kann induktiv definieren $f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, durch $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Insbesondere sind alle Ableitungen $f^{(n)}$ holomorph.*

(ii) *Es gilt*
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$
für alle $r \in (0, d(z, \partial D))$. (Cauchy–Formel für Ableitungen)

(iii) *f ist um jedes $z_0 \in D$ in eine Taylorreihe entwickelbar:*
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in B_{d(z_0,\partial D)}(z_0)\ .$$

Beweis: Nach 2.3.5 gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, mit a_n aus (2.12). Aus Beispiel 2.1.7(iv) wissen wir, dass eine Potenzreihe gliedweise differenziert werden darf, also
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$
für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Dasselbe Argument induktiv angewendet zeigt, dass f unendlich oft komplex–differenzierbar ist und
$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(z - z_0)^{k-n}$$
für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Für $z = z_0$ folgt $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$, also $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

2.3.7. **Bemerkung.**

(i) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt um den Punkt $z_0 \in D$ in eine *Potenzreihe entwickelbar*, falls es $\rho > 0$ gibt und eine Potenzreihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$, so dass $B_\rho(z_0) \subset D$ und $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Die Funktion f heißt *analytisch*, falls sie um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Wir haben eben gezeigt:
f analytisch $\iff$ f holomorph.

(ii) Die Reihe in (i) ist durch f eindeutig bestimmt, da $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Ist f analytisch, so wird f durch seine Taylorreihe dargestellt.

(iii) Der Konvergenzradius der Taylorreihe von f kann echt grösser sein als der Abstand $d(z_0, \partial D)$ des Entwicklungspunktes zum Rand. Für den Hauptzweig $\log : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ hat die Taylorreihe in $z_0 \in \mathbb{C}_-$, $\operatorname{Re} z_0 < 0$, die Form
$$\log(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n$$

mit Konvergenzradius $|z_0| > |\operatorname{Im} z_0| = d(z_0, \partial\mathbb{C}_-)$.

Der Satz von Morera is eine Umkehrung des Lemmas von Goursat und stellt ein wichtiges Holomorphiekriterium dar.

2.3.8. **Satz** (Morera). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset D$ gelte*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \qquad \textit{(Morera–Bedingung)}.$$

Dann ist f holomorph.

Beweis: Sei $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset D$. $B_r(z_0)$ ist ein Sterngebiet und der Hauptsatz über Kurvenintegrale für Sterngebiete behauptet, dass f eine Stammfunktion $F : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ besitzt. F ist holomorph, also ist nach 2.3.6 auch $F' = f$ holomorph. □

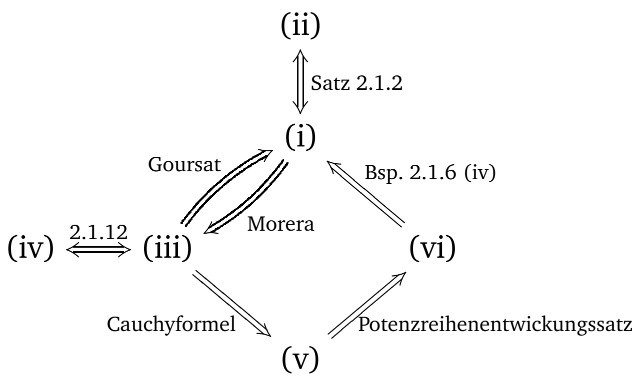
2.3.9. **Satz** (Zusammenfassung zum Holomorphiebegriff). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist auf D holomorph, d.h. in jedem Punkt $z \in D$ komplex–differenzierbar.*
(ii) *f ist in jedem Punkt $z \in D$ reell–differenzierbar und erfüllt die Cauchy–Riemannschen Gleichungen $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.*
(iii) *f ist stetig und für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset D$ gilt die Morera–Bedingung $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.*
(iv) *f ist stetig und besitzt lokal eine Stammfunktion, d.h. zu jedem $z \in D$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset D$, so dass $f|_U$ eine Stammfunktion hat.*
(v) *f ist stetig und für jede Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad \textit{für } z \in B_r(z_0)\ .$$

(vi) *f ist analytisch in D.*

Beweis:



□

Bemerkung. (i) Die Aussage "f holomorph $\Rightarrow f$ analytisch" zeigt deutlich, wie stark sich reelle und komplexe Differenzierbarkeit unterscheiden: Im Reellen ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion i.A. nicht einmal stetig, z.B. für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$, ist f' in $x=0$ unstetig. Auch wenn $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, muss f nicht analytisch sein, z.B. für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-1/x^2}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$, gilt $f^{(n)}(0)=0$ für alle n und die Taylorreihe stimmt nicht mit f überein.
(ii) Für den Aufbau der Funktionentheorie haben wir nur die Existenz der Ableitung und nicht deren Stetigkeit benötigt. Wenn man in der Definition der Holomorphie die Stetigkeit der Ableitung voraussetzt, kann man den Cauchyschen Integralsatz leicht mit Hilfe des Satzes von Gauß–Green (oder Stokes) herleiten: Ist $\gamma=\partial\Omega$ der positiv orientierte Rand eines stückweise glatt berandeten Gebiets Ω und f holomorph in einer Umgebung von Ω, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz \overset{\text{Stokes}}{=} \int_\Omega \underbrace{d(f(z)\,dz)}_{=0\,,\ \text{da } f \text{ holomorph}}=0\ .$$

2.4. **Identitätssatz, Nullstellen und holomorphe Fortsetzung.**

Bezeichnung: Für $D\subset\mathbb{C}$ offen setzen wir

$$\mathscr{O}(D):=\big\{\ f:D\to\mathbb{C}\ :\ f \text{ holomorph}\ \big\}\ .$$

2.4.1. **Satz** (Identitätssatz)**.** *Sei D Gebiet, $f\in\mathscr{O}(D)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $f\equiv 0$ *auf* D.
(ii) *Es gibt eine offene Teilmenge $U\subset D$, so dass $f|_U\equiv 0$.*
(iii) *Die Menge $\{z\in D: f(z)=0\}$ hat einen Häufungspunkt in D.*
(iv) $\exists\, z_0\in D$ *mit* $f^{(n)}(z_0)=0$ ***für alle*** $n\in\mathbb{N}_0$.

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) klar. Zu (iii)$\Rightarrow$(iv):
Sei $z_0\in D$ ein Häufungspunkt. Dann gilt $f(z)=\sum a_n(z-z_0)^n$, $z\in B_\rho(z_0)$, mit $\rho=d(z_0,\partial D)$ und $\exists\, z_k\neq z_0$, $z_k\to z_0$ mit $f(z_k)=0$. Übungsblatt 4, Aufgabe 1(b) $\Rightarrow\ a_n=0$, $n\in\mathbb{N}_0$. Aber $a_n=f^{(n)}(z_0)/n!$.
(iv)$\Rightarrow$(i): Betrachte

$$Z=\{z\in D: f^{(n)}(z)=0 \text{ für alle } n\in\mathbb{N}_0\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}\{z\in D: f^{(n)}(z)=0\}\ .$$

$f^{(n)}$ stetig $\Rightarrow$ $\{z\in D: f^{(n)}(z)=0\}$ abgeschlossen $\Rightarrow$ Z abgeschlossen (Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen).
Sei $w\in Z$. Dann folgt $f(z)=\sum\frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z-w)^n=0$ auf $B_\rho(w)$ mit $\rho=d(w,\partial D)$ $\Rightarrow$ $B_\rho(w)\subset Z$ $\Rightarrow$ Z offen. Zudem $z_0\in Z\neq\emptyset$, also $D=Z$, da D zusammenhängend ist. $\square$

Häufig benutzt man den Satz für $h-g$ anstelle f, wobei $h,g\in\mathscr{O}(D)$.