9. Vorlesung, 24.05.2017

Für die Gültigkeit des Identitätssatzes ist der Zusammenhang von D, der beim Beweis der Implikation (iv) $\Rightarrow$ (i) benutzt wird, wesentlich: ist z. B. D die Vereinigung zweier disjunkter Kreisseheiben B_0, B_1 und setzt man $f(z) := 0$ für $z \in B_0$, $f(z) := 1$ für $z \in B_1$, so ist f holomorph in D, sie hat die Eigenschaften (ii), (iii) und (iv) aber es gilt $f \not\equiv 0$ in D.

2.4.2. **Folgerung** (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung). *Sei D ein Gebiet, $A \subset D$ eine beliebige Teilmenge, $A \neq \emptyset$, mit mindestens einem Häufungspunkt in D. Sei $f : A \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es höchstens eine holomorphe Fortsetzung $F : D \to \mathbb{C}$ von f, d.h. $F \in \mathscr{O}(D)$ mit $F|_A = f$.*

Beweis: Angenommen es gibt $F_1, F_2 \in \mathscr{O}(D)$, $F_1|_A = F_2|_A$. Mit 2.4.1(iii) für $F_1 - F_2$ folgt $F_1 \equiv F_2$ in D. $\square$

2.4.3. **Satz.** *Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Dann gilt: $f : I \to \mathbb{R}$ ist analytisch $\iff$ f besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$.*

Beweis: "$\Rightarrow$":
f reell–analytisch $:\iff$ $\forall\, x \in I\ \exists \varepsilon(x) > 0$, so dass $\big(x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)\big) \subset I$ und $f(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x)(y-x)^n$ für alle $y \in \big(x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)\big)$, wobei $c_n(x) = f^{(n)}(x)/n!$. Die Potenzreihe hat Konvergenzradius $R = 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n(x)|}$. Daher hat die komplexe Potenzreihe $\sum\limits_{n\geq 0} c_n(x)(z-x)^n$ Konvergenzradius $R \geq \varepsilon(x)$. Definiere

$$F_x : B_{\varepsilon(x)}(x) \to \mathbb{C} \quad , \quad F_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)(z-x)^n \ .$$

Setze $D := \bigcup\limits_{x\in I} B_{\varepsilon(x)}(x)$; D ist ein Gebiet. (Beweis?)
Auf dem Durchschnitt zweier Kreisscheiben $B_{\varepsilon(x_1)}(x_1)$ und $B_{\varepsilon(x_2)}(x_2)$ stimmen F_{x_1}, F_{x_2} überein, da sie auf $B_{\varepsilon(x_1)}(x_1) \cap B_{\varepsilon(x_2)}(x_2) \cap I$ mit f übereinstimmen. Damit ist $F : D \to \mathbb{C}$, $F(z) = F_x(z)$ für $z \in B_{\varepsilon(x)}(x)$, eine holomorphe Fortsetzung von f. $\square$

Die holomorphe Fortsetzung definieren wir durch Einsetzen der komplexen Variable z in der Potenzreihendarstellung von f. Z. B. ist die holomorphe Fortsetzung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$, die Funktion

$$F : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}, \quad F(z) = (1 + z^2)^{-1}.$$

Die Existenz der imaginären Nullstellen von $z^2 + 1 = 0$ erklärt auch, wieso die Entwicklung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$ um 0 nur für $|x| < 1$, jedoch nicht für $|x| \geq 1$ gültig ist: Auf dem Konvergenzkreis $|z| = 1$ von $\sum_{n\geq 0}(-z^2)^n$ liegen die singulären Punkte von $(1 + z^2)^{-1}$.

Auch den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = (1 + x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ kann man leicht berenchnen, indem man der Potenzreihenentwicklungssatz für die *komplexe* Reihe $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x_0)^n$ anwendet. Der Konvergenzradius ist nämlich der Abstand von x_0 zum Rand von $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, d. h. zum $\{\pm i\}$. Das ist $|x_0 - i| = \sqrt{x_0^2+1}$.

2.4.4. **Definition.** Ist $A \subset X$, wobei X ein topologischer Raum ist, so heißt ein Punkt $p \in A$ *isolierter Punkt*, wenn es eine Umgebung U von p gibt mit $U \cap A = \{p\}$. Die Menge A heißt *diskret*, wenn alle Punkte von A isolierte Punkte von A sind.

Es gilt: $\quad A$ diskret $\iff$ A enthält keinen Häufungspunkt von A.

Als Beispiel, die Menge $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist diskret in $\mathbb{R}$. Der einzige Häufungspunkt von A in $\mathbb{R}$ ist 0 und 0 gehört nicht zu A.

2.4.5. **Satz** (Isoliertheit der Nullstellen). *Sei D ein Gebiet, $f \in \mathscr{O}(D)$, $f \not\equiv 0$. Dann ist die Menge der Nullstellen $N_f = \{z \in D : f(z) = 0\}$ diskret und abgeschlossen.*

Beweis von 2.4.5: Wäre N_f nicht diskret, so hätte N_f einen Häufungspunkt in D. Nach dem Identitätssatz (2.4.1(iii)) wäre $f \equiv 0$ ↯. □

Die Nullstellen *reeller* unendlich oft differenzierbarer Funktionen haben diese Eigenschaft nicht: so ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und und der Nullpunkt ist Häufungspunkt der Nullstellen $\frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Diese Funktion hat übrigens die Eigenschaft, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, aber f is nicht identisch Null.

Die Nullstellen holomorpher Funktionen $f \in \mathscr{O}(D)$ können sich sehr wohl gegen den Rand von D häufen. So hat etwa die Funktion $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$,

$$f(z) = \sin \frac{z+1}{z-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},$$

die Nullstellenmenge $\{\frac{n\pi+1}{n\pi-1} : n \in \mathbb{Z}\}$ mit Häufungspunkt 1.

Wenn man den Satz 2.4.5 auf die Funktion $f - c$ anwendet, wobei $c \in \mathbb{C}$ ist, erhält man die folgende Aussage über die Diskretheit der Faser.

Es sei D eine Gebiet und $f \in \mathscr{O}(D)$ nicht konstant. Dann ist für jede Zahl $c \in \mathbb{C}$ die Menge $f^{-1}(c)$ der c-Stellen von f diskret und abgeschlossen in D (evtl. leer). Insbesondere ist fur jedes Kompaktum $K \subset D$ die Menge $f^{-1}(c) \cap K$ endlich, speziell hat f höchstens abzählbar unendlich viele c-Stellen in D.

In der Tat, wäre $f^{-1}(c) \cap K$ unendlich, so gäbe es eine Folge von paarweise verschiedenen Punkten in $f^{-1}(c) \cap K$. Solche Folge hätte, da $f^{-1}(c) \cap K$ kompakt ist, einen Häufungspunkt in $f^{-1}(c) \cap K$, was unmoglich ist, da alle Punkte von $f^{-1}(c)$ isoliert liegen. Da jeder Bereich in $\mathbb{C}$ die Vereinigung abzählbar vieler Kompakta ist, so folgt weiter, dass $f^{-1}(c)$ abzählbar ist.

2.5. **Cauchysche Abschätzungen, Satz von Liouville, Fundamentalsatz der Algebra.** Aus der Cauchy-Formel kann man mittels Standardabschätzung für Wegintegrale die folgenden nützlichen Abschätzungen für die Koeffizienten der Reihenentwicklung in einem Punkt herleiten. Es ist wichtig, dass die Koeffizienten durch die Supremumsnorm der Funktion abschätzen lassen.

2.5.1. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$, $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ und $M = \sup_{\partial B_r(z_0)} |f|$.*

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f um z_0. Dann gilt:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Der Potenzreihenentwicklungssatz 2.3.5 impliziert:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$$

Mit der Standardabschätzung (2.2.7 (v)) folgt

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} \frac{|f(\zeta)|}{\underbrace{|(\zeta - z_0)^{n+1}|}_{=r^{n+1}}} \underbrace{\ell(\partial B_r(z_0))}_{=2\pi r} = \frac{M}{r^n}.$$

□

2.5.2. **Definition** (Weierstrass). Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ heißt *ganze* Funktion. Eine ganze Funktion, die kein Polynom ist, heißt *transzendent*.

Beispiele: Polynome, $\exp$, $\sin$, $\cos$.

2.5.3. **Satz** (Satz von Liouville). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis: Die Taylorentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ von f um 0 konvergiert *überall* in $\mathbb{C}$ (Satz 2.3.5). Da f beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$, so dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus 2.5.1 folgt $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ für alle $r > 0$. Da r beliebig groß werden kann, folgt $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$, d.h. $f(z) = a_0$. □

2.5.4. **Satz** (Fundamentalsatz der Algebra). *Ein nicht konstantes Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis: Ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ ist nicht konstant genau dann, wenn $\operatorname{grad} P \geqslant 1$, d h. genau dann, wenn $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ mit $n \geqslant 1$ und $a_n \neq 0$. (In der Tat, P ist konstant, genau dann, wenn $P' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$; andererseits ist die n-te Ableitung von $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$, $P^{(n)}(z) = n! a_n$.)

Angenommen $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ holomorph und es gilt

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^n| \cdot \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + a_n \right|} \to 0 \cdot \frac{1}{a_n} = 0 \,. \quad |z| \to \infty$$

f ist also beschränkt und konstant nach 2.5.3; folglich ist P konstant ↯. □

Ein Körper K heißt ***algebraisch abgeschlossen*** wenn jedes Polynom $f \in K[x]$ mit Koeffizienten in K und mit $\operatorname{grad} f \geqslant 1$ besitzt eine Nullstelle in K. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass der Körper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht algebraisch abgeschlossen, da z. B. $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ keine Nustelle in $\mathbb{Q}$ hat, und $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat.

Äquivalent sind:

- K ist algebraisch abgeschlossen.
- Jedes $f \in K[X]$, $\operatorname{grad} f \geqslant 1$ zerfällt in Linearfaktoren: $f = c \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$, $n = \operatorname{grad} f$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $c \neq 0$.

Sei K ein Körper, $f \in K[X]$, $\alpha \in K$ Nullstelle $\rightsquigarrow \exists\, q \in K[X]$ mit $f = (X - \alpha)q$ (denn $f = (X - \alpha)q + r$, $\operatorname{grad} r < 1$, also $r \in K$ und $0 = f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r$ $\rightsquigarrow r = 0$). Also ist $X - \alpha$ ein Faktor von f genau dann, wenn α eine Nullstelle von f ist. Dabei haben wir benutzt:

2.5.5. **Satz** (Satz über Division mit Rest). *Sei R ein Ring, seien $f, g \in R[X]$ mit $f = \sum_{i=0}^d a_i X^i$, $a_d \in R^*$ (insbesondere $\operatorname{grad} f = d$). Dann $\exists! q, r \in R[X]$ mit $f = g\,q + r$, $\operatorname{grad} r < d$.*

Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, können wir ein Polynom $f \in K[X]$, $\operatorname{grad} f \geqslant 1$, zerlegen $f = (X - \alpha_1)q$, wobei α_1 eine Nullstelle von f ist und q ein Polynom mit $\operatorname{grad} q = \operatorname{grad} f - 1$ ist. Falls $\operatorname{grad} q \geqslant 1$, gibt es eine Nullstelle α_2 von q und wir verfahren rekursiv um eine Zerlegung $f = c \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ zu erhalten. Manche Nullstellen α_i, $i = 1, \dots, n$, können gleich sein. Ist α eine Nullstelle von f, so bezeichnen wir die Vielfachheit von α, die Anzahl der Nullstellen α_i, $i = 1, \dots, n$, die gleich α sind. Das Polynom f hat also genau $\operatorname{grad} f$ Nullstellen in K, gezählt mit Vielfachheit. Die Vielfachheit der Nullstelle α ist auch die Vielfachheit von $X - \alpha$ in der Primfaktorzerlegung $f = c \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ von f

2.5.6. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$, $K \subset D$ kompakt und $0 < \varepsilon < d\,(K, \partial D)$. Sei $K_\varepsilon = \{z \in D : d\,(z, K) \leq \varepsilon\}$. Dann gilt*

$$\|f^{(n)}\|_K \leq \frac{n!}{\varepsilon^n} \|f\|_{K_\varepsilon}.$$

Beweis: Für $z \in K$ gilt $\overline{B_\varepsilon(z)} \subset K_\varepsilon$, also

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{\varepsilon^n} \|f\|_{K_\varepsilon}.$$

$\square$