10. VORLESUNG, 29.05.2017

2.6. **Maximumprinzip, Offenheitssatz, Schwarzsches Lemma.**

2.6.1. **Satz** (Mittelwertsatz für holomorphe Funktionen). *Ist f holomorph in einer Umgebung von $\overline{B_r(z_0)}$, so gilt*

$$f(z_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt}_{\text{Mittelwert von } f \text{ auf } |z-z_0|=r} \qquad (*)$$

nach der Cauchy–Formel.

Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ die *Mittelwerteigenschaft* hat, wenn $(*)$ für jede $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ gilt.

2.6.2. **Satz** (Maximumprinzip). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Hat $|f|$ ein lokales Maximum in D, so ist f konstant.*

Beweis: Sei $z_0 \in D$ ein lokales Maximum, $\overline{B_R(z_0)} \subset D$ eine Umgebung von z_0 mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für $z \in \overline{B_R(z_0)}$.
Ist $f(z_0) = 0$, so ist $f|_{B_R(z_0)} \equiv 0$ und nach Identitätssatz $f \equiv 0$.
Ist $f(z_0) \neq 0$, so $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\varphi},\ (fe^{-i\varphi})(z_0) = |f(z_0)| > 0$.
Wir ersetzen f durch $fe^{-i\varphi}$ und dürfen annehmen, dass $f(z_0) > 0$. Es gilt also $f(z_0) \geq |f(z)|$ für alle $z \in B_R(z_0)$.
Betrachte nun die Funktion $g : B_R(z_0) \to \mathbb{R},\ g(z) = \mathrm{Re}(f(z_0) - f(z))$.

- Wegen $\mathrm{Re}\, f(z) \leq |f(z)| \leq f(z_0)$ gilt $g \geq 0$, $g(z_0) = 0$.
- Durch Zerlegung in Real- und Imginärteil von $(*)$ folgt, dass auch $\mathrm{Re}\, f$ die Mittelwerteigenschaft hat, also auch g.

Damit

$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it})\,dt\ .$$

Der Integrand ist stetig und $\geq 0 \Rightarrow g(z_0 + re^{it}) = 0$ für alle $t \in [0, 2\pi], 0 < r \leq R \Rightarrow$ $\mathrm{Re}\, f$ konstant in $B_R(z_0)$.
Aber $|f(z)| \leq f(z_0) = \mathrm{Re}\, f(z) \leq |f(z)| \Rightarrow |f(z)| \equiv \mathrm{Re}\, f(z) \Rightarrow \mathrm{Im}\, f(z) = 0 \Rightarrow$ $f(z) = \mathrm{Re}\, f(z) = f(z_0)$ für $z \in B_R(z_0)$.
Identitätssatz $\Rightarrow f(z) = f(z_0)$ für $z \in D$. □

2.6.3. **Bemerkung.** Man kann auch die folgende Form des Maximumprinzips beweisen, die z. B. für harmonische Funktionen andwendbar ist. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und erfüllt die Mittelwerteigenschaft. Hat $|f|$ ein lokales Maximum in D, so ist f konstant.

2.6.4. **Satz** (Maximumprinzip für beschränkte Gebiete). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ beschränkt, $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathscr{C}(\overline{D})$. Dann nimmt $|f|$ ihr Maximum auf dem Rand an:*

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\partial D} \text{ *für alle* } z \in D\ .$$

2.6.5. **Satz** (Minimumprinzip). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ und $z_0 \in D$, so dass $|f|$ ein lokales Minimum in z_0 hat.*
Dann gilt $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant in D.

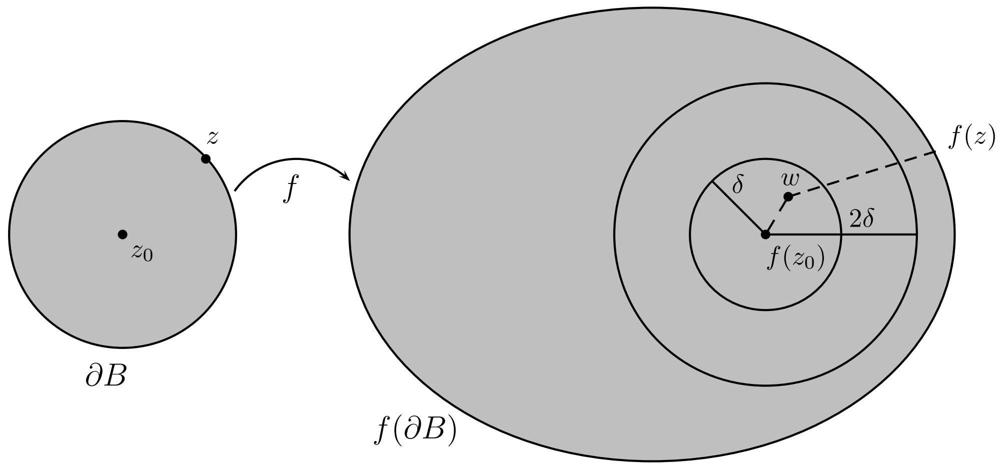
Beweis: Ist $f(z_0) \neq 0$, so $f(z) \neq 0$, $z \in U(z_0)$ und $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}(U)$ und $\frac{1}{|f|}$ hat ein lokales Maximum in z_0; dann ist f konstant in U also in D nach Identitätssatz. □

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *offen*, wenn das Bild $f(U)$ jeder in X offenen Menge U offen in Y ist. Beachte: Im Gegensatz hierzu bedeutet Stetigkeit, dass jede in Y offene Menge V ein offenes Urbild $f^{-1}(V)$ hat. f stetig $\not\Rightarrow$ f offen, z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht offen.
Sei $f : X \to Y$ stetig, bijektiv. Dann gilt: f offen $\iff$ f homöomorph.
$P : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{C}^*$, $P(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ist stetig, bijektiv, aber nicht offen.

2.6.6. **Satz** (Offenheitssatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$ nirgends lokal konstant. Dann ist die Abbildung $F : D \to \mathbb{C}$ offen.*

Beweis: Sei $U \subset D$ offen und $z_0 \in U$. Z. z. $\exists\, \delta > 0 : B_\delta(f(z_0)) \subset f(U)$. f ist um z_0 nicht-konstant $\Rightarrow \exists\, B = B_r(z_0)$ mit $\overline{B} \subset D$ und $f(z_0) \notin f(\partial B)$ Sonst $\forall r > 0$ $\exists z_r \in \partial B_r(z_0)$ mit $f(z_0) = f(z_r)$. Wähle $r = 1/n$, dann $z_{1/n} \to z_0$, $n \to \infty$ und $f(z_0) = f(z_{1/n})$. Nach Identitätssatz ist dann f konstant in der Zusammenhangskomponente von z_0. Widerspruch.
Sei

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(z_0)| \, .$$



Wir zeigen, dass $B_\delta(f(z_0)) \subset f(B)$. Sei ω mit $|\omega - f(z_0)| < \delta$. Dann

$$2\delta \leq |f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - \omega| + |f(z_0) - \omega| < |f(z) - \omega| + \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - \omega| > \delta$$

für alle $z \in \partial B$, also

$$\min_{z \in \partial B} |f(z) - \omega| > \delta > |f(z_0) - \omega| \, .$$

Dies bedeutet, dass die nicht konstante Funktion $\overline{B} \ni z \to |f(z) - \omega|$ ihr Minimum in B erreicht $\Rightarrow$ sie hat eine Nullstelle in B, d.h. $\exists \zeta \in B$ mit $f(\zeta) = \omega \Rightarrow B_\delta(f(z_0)) \subset f(B)$. □

Äquivalente Fassung des Offenheitssatzes:

2.6.7. **Satz** (Satz von der Gebietstreue)**.** *Sei D ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ nicht konstant. Dann ist $f(D)$ wieder ein Gebiet.*

Beweis: f nicht konstant $\Rightarrow$ f nirgends lokal konstant (nach Identitätssatz). Offenheitssatz $\Rightarrow$ $f(D)$ offen. f stetig $\Rightarrow$ $f(D)$ zusammenhängend. $\square$

2.6.8. **Satz** (Schwarzsches Lemma)**.** *Sei $\mathbb{D} = B_1(0)$. Für jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ gilt*

$$|f(z)| \leqslant |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| \leqslant 1 \,. \tag{2.13}$$

Gibt es $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $|f(w)| = |w|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung um 0, d.h. es gibt $\zeta \in S^1$ mit $f(z) = \zeta \cdot z$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Beweis: (Carathéodory)

Sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(a_0 = f(0) = 0)$ die Taylorentwicklung von f für $z \in \mathbb{D}$. Die Potenzreihe $\sum_{n \geqslant 1} a_n z^{n-1}$ hat denselben Konvergenzradius und definiert $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$, $z \in \mathbb{D}$. Dann gilt $f(z) = zg(z)$ und $g(0) = a_1 = f'(0)$. Sei $w \in \mathbb{D}$ fest und

$$r \in \big[|w|, 1\big] \,, \;\; w \in \overline{B_r}(0) \underset{\text{Maxprinzip}}{\Rightarrow} |g(w)| \leqslant \max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Für $r \to 1$ folgt $|g(w)| \leqslant 1$. Da w beliebig ist, folgt (2.13). Falls $|f(w)| = |w|$, $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oder $|f'(0)| = 1$, so hat $|g|$ ein Maximum in $\mathbb{D}$. Maximumprinzip $\Rightarrow$ g ist eine Konstante vom Betrag 1, $g(z) = \zeta \in S^1$. $\square$

Eine biholomorphe Abbildung $f : D \to D$ einer offenen Menge auf sich selbst heißt ***Automorphismus von*** D. Die Menge $\mathrm{Aut}(D)$ der Automorphismen ist bzgl. der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

2.6.9. **Satz.** *Jeder Automorphismus $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ ist eine Drehung, d.h. $\exists\, \zeta = e^{i\varphi} \in S^1$, $f(z) = \zeta \cdot z$, $z \in \mathbb{D}$.*

Beweis: Nach dem Schwarzschen Lemma gilt

$$|f(z)| \leqslant |z| \,, \;\; |f^{-1}(w)| \leqslant |w| \text{ für alle } z, w \in \mathbb{D} \,.$$

Für $w = f(z) \Rightarrow |z| = |f^{-1} f(z)| \leqslant |f(z)|$. Also $|f(z)| = |z|$, $\left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1$, $z \neq 0 \Rightarrow$ $\exists\, \zeta \in S^1$ mit $f(z) = \zeta \cdot z$ (Gleichheit im Schwarzschen Lemma). $\square$