11. VORLESUNG, 31.05.2017

Betrachte nun die spezielle Möbiustransformation

$$\varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ \varphi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \qquad (a \in \mathbb{D} \text{ fest})\ .$$

Dann gilt:

$$\varphi_a(0) = a\,,\ \varphi_a(a) = 0\,,\ \varphi_a^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}\,,\quad \text{d.h. } \varphi_a^{-1} = \varphi_a$$

φ_a ist eine holomorphe Involution, die 0 und a vertauscht.

2.6.10. **Satz.**

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \Big\{ \mathbb{D} \ni z \mapsto \zeta \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \in \mathbb{D} : a \in \mathbb{D},\ \zeta \in S^1 \Big\}.$$

Beweis: Sei $a = f^{-1}(0)$. Dann ist

$$f \circ \varphi_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \text{ und } f \circ \varphi_a(0) = f(a) = 0\ .$$

Satz 2.6.9 $\Rightarrow \exists \zeta \in S^1$ mit $f \circ \varphi_a(z) = \zeta \cdot z$, $f(z) = \zeta\varphi_a^{-1}(z) = \zeta\varphi_a(z) = \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ · □

2.7. Isolierte Singularitäten.

2.7.1. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$. Ein isolierter Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ (d.h. so dass $\exists\, r > 0 : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset D$) heißt ***isolierte Singularität von*** f.
Wir unterscheiden drei Arten von isolierten Singularitäten:

(1) ***hebbare Singularitäten***: $\exists\, \tilde{f} \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\})$ mit $\tilde{f}|_D = f$.
(2) ***Pole***: nicht hebbar und $\exists\, g \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\})$, $p \in \mathbb{N}$ mit $f(z) = g(z)/(z-z_0)^p$ für $z \in D$.
(3) ***wesentliche Singularitäten***: weder hebbar, noch Pole.

Beispiele:Die Funktionen $f_1 : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = \frac{z^2-1}{z-1}$, $f_2 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ $f_2(z) = \frac{\sin z}{z}$, $f_3 : \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $f_3(z) = \frac{z}{e^z-1}$ haben hebbare Singularitäten in 1 bzw. in 0. Die Funktion $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ hat einen Pol in z_0, die Funktion $e^{\frac{1}{z}}$ hat eine wesentliche Singularität in 0. Die Funktion $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ hat Pole in $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Der Punkt 0 ist keine isolierte Singularität, da $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$.

2.7.2. **Satz** (Riemannscher Hebbarkeitssatz). *Eine isolierte Singularität z_0 einer Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ ist genau dann hebbar, wenn es eine Umgebung U von z_0 gibt, so dass f in $U \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.*

Beweis: Die Idee ist, die Funktion f mit $(z-z_0)^2$ zu multiplizieren; die so erhaltene Funktion h hat eine holomorphe Fortsetzung in z_0, die in z_0 zusammen mit ihrer ersten Ableitung verschwindet. Man kann also ein Faktor $(z-z_0)^2$ von h abspalten und der andere Faktor ist die gesuchte holomorphe Fortsetzung!

Nun ausführlich: Betrachte $g, h : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)f(z) & , \quad z \neq z_0 \\ 0 & , \quad z = z_0\ , \end{cases}$$

$$h(z) = (z-z_0)g(z)\ .$$

g ist nach Annahme stetig in z_0. Daher gilt

$$\lim_{z\to z_0}\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}g(z)=0$$

und h ist $\mathbb{C}$–diffbar, also holomorph mit $h(z_0)=h'(z_0)=0$.
Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz $\exists\, r>0:\ \forall\, z\in B_r(z_0)$

$$h(z)=(z-z_0)^2\underbrace{(a_2+a_3(z-z_0)+\ldots)}_{=:\tilde{f}(z)}=(z-z_0)^2\tilde{f}(z)$$

mit $\tilde{f}\in\mathcal{O}(B_r(z_0))$. Für $z\in B_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ gilt $h(z)=(z-z_0)g(z)=(z-z_0)^2f(z)$, also $\tilde{f}(z)=f(z)$. Setze

$$\tilde{\tilde{f}}:D\cup\{z_0\}\to\mathbb{C},\ \tilde{\tilde{f}}(z)=\begin{cases}f(z) & ,\quad z\in D\\ \tilde{f}(z) & ,\quad z\in B_r(z_0)\ .\end{cases}$$

$\tilde{\tilde{f}}$ ist wohldefiniert und $\mathbb{C}$–diffbar in $D\cup\{z_0\}$ mit $\tilde{\tilde{f}}|_D=f$. □

2.7.3. **Definition.** Sei $f\in\mathcal{O}(D)$, $z_0\in D$. Die ***Ordnung von*** f ***in*** z_0 ist

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f)=\begin{cases}\min\{n\in\mathbb{N}_0: f^{(n)}(z_0)\neq 0\},\ f\not\equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } z_0,\\ \infty,\quad f\equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } z_0.\end{cases}$$

(Nach dem Identitätssatz gibt es $n\in\mathbb{N}_0$ mit $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ falls $f\not\equiv 0$ in einer Umgebung von z_0.)

Beispiele: $f(z)\neq 0 \iff \operatorname{ord}_z(f)=0$; $\operatorname{ord}_{z_0}(z-z_0)^n=n$; $\operatorname{ord}_w(z-z_0)^n=0$, $w\neq z_0$.

2.7.4. **Satz.** *Sei $f\in\mathcal{O}(D)$, $z_0\in D$, $m=\operatorname{ord}_{z_0}(f)$. Dann gibt es $g\in\mathcal{O}(D)$, so dass $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $z\in D$ und $g(z_0)\neq 0$.*

Beweis: Die Taylorentwicklung von f um z_0 lautet

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\ldots=(z-z_0)^m(a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\ldots)\ ,$$

wobei $a_m=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0$. Daher ist

$$g:D\to\mathbb{C}\quad,\quad g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{(z-z_0)^m} & ,\quad z\neq z_0\\ a_m & ,\quad z=z_0\end{cases}$$

holomorph in D: g ist komplex diffbar in z_0, da $g(z)=a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\ldots$ eine konvergente Potenzreihe in einer Umgebung von z_0 ist. □

Sei nun $f\in\mathcal{O}(D)$, z_0 ein Pol von f, d.h. z_0 ist nicht hebbar und

$$f=g/(z-z_0)^p\quad,\quad g\in\mathcal{O}(D\cup\{z_0\})\quad,\quad p\in\mathbb{N}\ .$$

Sei $q=\operatorname{ord}_{z_0}(g)$ und $g(z)=h(z)(z-z_0)^q$, $h\in\mathcal{O}(D\cup\{z_0\})$, $h(z_0)\neq 0$. Dann gilt:

$$f(z)=\frac{h(z)(z-z_0)^q}{(z-z_0)^p}=\frac{h(z)}{(z-z_0)^{p-q}}\ ,\ z\in D.$$

Es ist $p > q$, ansonsten wäre z_0 hebbar; f hat also die Darstellung

$$f = \frac{h}{(z-z_0)^r}\,, \quad h(z_0) \neq 0, \tag{2.14}$$

wobei $r = p - q > 0$.

2.7.5. **Definition.** Sei $f \in \mathcal{O}(D)$, z_0 ein Pol von f. Die Zahl $r > 0$ aus der Darstellung (2.14) heißt die ***Ordnung des Pols*** z_0 ***von*** f. Die Zahl $\operatorname{ord}_{z_0} f = -r$ heißt die ***Ordnung der Funktion*** f ***in*** z_0.

Es ist ein unglücklicher Zufall, dass dem Wort "Ordnung" bei Polstellen z_0 eine doppelte Bedeutung zukommt: zum einen hat f in z_0 eine negative Ordnung, zum anderen hat f in z_0 einen Pol von positiver Ordnung.

Wir charakterisieren nun die Pole durch das Wachstumsverhalten.

2.7.6. **Satz.** *Eine isolierte Singularität z_0 von $f \in \mathcal{O}(D)$ ist ein Pol genau dann, wenn* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Beweis:

$$(*) \qquad \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty :\Longleftrightarrow \forall M > 0\ \exists r > 0\ \forall z \in B_r(z_0)\setminus\{z_0\} : |f(z)| > M\,.$$

Sei $r > 0$, so dass $B_r(z_0)\setminus\{z_0\} \subset D$ und $|f(z)| > 1$, $z \in B_r(z_0)\setminus\{z_0\}$. Betrachte

$$h : B_r(z_0) \to \mathbb{C} \quad , \quad h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & , \quad z \in B_r(z_0)\setminus\{z_0\} \\ 0 & , \quad z = z_0 \end{cases}$$

$(*) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{z\to z_0} h(z) = 0 = h(z_0)$, also h ist stetig in $B_r(z_0)$ und holomorph in $B_r(z_0)\setminus\{z_0\}$. Nach dem Hebbarkeitssatz ist h holomorph in $B_r(z_0)$.
Sei $p = \operatorname{ord}_{z_0}(g)$. Es gilt $h(z) = (z-z_0)^p k(z)$ mit $k \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$, $k(z_0) \neq 0$. Für $z \neq z_0$ ist $k(z) = h(z)(z-z_0)^{-p} \neq 0$. Schließlich gilt

$$\frac{1}{f(z)} = h(z) = (z-z_0)^p k(z), \quad f(z) = \frac{1}{k(z)}\frac{1}{(z-z_0)^p}\,,$$

wobei $\frac{1}{k} \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$. $\square$