

12. VORLESUNG, 12.06.2017

2.7.7. **Satz** (Satz von Casorati-Weierstrass). Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ und z_0 eine isolierte Singularität von f . Äquivalent:

- (i) z_0 ist eine wesentliche Singularität.
- (ii) Für jede Umgebung U von z_0 mit $U \setminus \{z_0\} \subset D$ liegt $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht in \mathbb{C} .
- (iii) Es gibt eine Folge (z_n) in D mit $z_n \rightarrow z_0$, so dass $f(z_n)$ keinen Grenzwert in $\widehat{\mathbb{C}}$ hat.

Beweis:

Angenommen, es gäbe U , so dass $f(U \setminus \{z_0\})$ nicht dicht in \mathbb{C} liegt. Dann gibt es $B_r(a)$, $r > 0$, mit $f(U \setminus \{z_0\}) \cap B_r(a) = \emptyset$. Definiere

$$g : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad g(z) = \frac{1}{f(z) - a} .$$

g ist holomorph und $|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - a|} < \frac{1}{r}$.

Hebbarkeitssatz $\Rightarrow g$ ist holomorph fortsetzbar nach U . Es ist $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$, also

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \begin{cases} a + \frac{1}{g(z_0)} & , \quad \text{falls } g(z_0) \neq 0 \\ \infty & , \quad \text{falls } g(z_0) = 0 . \end{cases}$$

f hat also entweder eine hebbare Singularität (wenn $g(z_0) \neq 0$) oder einen Pol (wenn $g(z_0) = 0$). Widerspruch. \square

2.7.8. **Satz** (Großer Satz von Picard). Seien $f \in \mathcal{O}(D)$ und z_0 eine wesentliche isolierte Singularität von f . Dann sind für jede Umgebung U von z_0 nur zwei Fälle möglich:

- (i) $f(U \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C}$ oder
- (ii) $f(U \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C} \setminus \{\text{Punkt}\}$.

2.7.9. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine **meromorphe Funktion** auf D ist eine Funktion $f : D' \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

- (i) $D' \subset \mathbb{C}$ offen ist und $P(f) := D \setminus D'$ diskret ist,
- (ii) $f \in \mathcal{O}(D')$ und f einen Pol in jedem Punkt von $P(f)$ hat.

Wenn $P(f)$ leer ist, so ist $f \in \mathcal{O}(D)$; jede holomorphe Funktion ist also meromorph. Die Menge der meromorphen Funktionen in D wird mit $\mathcal{M}(D)$ bezeichnet. Die **Ordnung der meromorphen Funktion** f in einem Punkt $z \in D'$ des Definitionsbereichs ist definiert wie in Definition 2.7.3 und in einem Pol $z \in P(f)$ wie in Definition 2.7.5.

Beachte: Eine meromorphe Funktion auf D ist keine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$! Für $z \in P(f)$ gilt $\lim_{w \rightarrow z} f(w) = \infty$. Wir können deshalb die Funktion $\tilde{f} : D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$,

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in D' \\ \infty & , \quad z \in P(f) \end{cases}$$

betrachten; $\tilde{f} : D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ ist die stetige Fortsetzung von $f : D' \rightarrow \mathbb{C}$ in $P(f)$. Wir identifizieren f mit \tilde{f} . Eine Umformulierung der Def. 2.7.9 ist also:

$$f \text{ meromorph auf } D : \iff \begin{cases} f : D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \text{ stetig} \\ P(f) := f^{-1}(\infty) \text{ abgeschlossen und diskret} \\ f \in \mathcal{O}(D \setminus P(f)) \end{cases}$$

Kurz gesagt: f heißt meromorph in D , wenn sie dort bis auf eine abgeschlossene diskrete Menge von Polen holomorph ist.

2.7.10. Beispiel.

(1) Rationale Funktionen $R = \frac{P}{Q}$, $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, sind meromorph in \mathbb{C} . Nach Kürzen der gemeinsamen Linearfaktoren von P und Q können wir annehmen, dass P, Q teilerfremd sind. Dann ist $R \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus N(Q))$ wobei $N(Q) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$ und R hat Pole in $N(Q)$.

(2) Sind $f, g \in \mathcal{O}(D)$, D Gebiet; $g \neq 0$. Dann $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(D)$.

Beweis:

Sei $N(g) = \{z \in D : g(z) = 0\}$. Aus dem Identitätssatz folgt, dass $N(g)$ keinen Häufungspunkt in D hat, also $N(g)$ ist abgeschlossen und diskret. Sei

$$N = \{z \in N(g) : \text{ord}_z(f) \geq \text{ord}_z(g)\}.$$

Dann sind die Punkte in N hebbare Singularitäten von f/g und werden zum Definitionsbereich hinzugenommen. An den Punkten von $N(g) \setminus N =: P(f/g)$ hat f/g Pole. Da $P(f)$ als Teilmenge von $N(g)$ keine Häufungspunkte hat, ist $f \in \mathcal{M}(D)$.

$$\frac{f}{g} : D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)} & , \quad \text{ord}_z f = \text{ord}_z g = k \\ 0 & , \quad \text{ord}_z f > \text{ord}_z g \\ \infty & , \quad \text{ord}_z f < \text{ord}_z g . \end{cases}$$

Die Funktion $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ist meromorph auf \mathbb{C} (mit Polen in $\pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$) aber nicht rational.

(3) $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ ist keine meromorphe Funktion, da $z = 0$ kein Pol ist.

2.7.11. **Satz.** $\mathcal{M}(D)$ ist ein Ring bezüglich Addition und Multiplikation der Funktionen. Ist D ein Gebiet, so ist $\mathcal{M}(D)$ ein Körper.

Beachte: Ist D kein Gebiet, so ist

$$f : D \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \begin{cases} 1 & , \quad z \in D_1 \\ 0 & , \quad z \in D \setminus D_1 \end{cases}$$

(wobei D_1 eine Komponente von D ist) holomorph, aber $P\left(\frac{1}{f}\right) = D \setminus D_1$ ist offen, also nicht diskret, und $\frac{1}{f}$ definiert keine meromorphe Funktion.

Wir wollen nun holomorphe und meromorphe Funktionen in $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ betrachten.

2.7.12. **Definition.** Sei $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen mit $\infty \in D$ und $r > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subset D$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *holomorph* in D , falls:

- (i) f ist stetig in D .
- (ii) f ist holomorph in $D \setminus \{\infty\}$.

Eine Funktion $f : D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ heißt *meromorph* in D , falls:

- (i) f ist stetig in D .
- (ii) $P(f) := f^{-1}(\infty)$ ist abgeschlossen und diskret.
- (iii) $f \in \mathcal{O}(D \setminus P(f))$.

2.7.13. Beispiel.

(1)

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^m} & , \quad z \neq \infty \quad (m \in \mathbb{N}) \\ 0 & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist holomorph.

(2)

$$P : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad P(z) = \begin{cases} z^m & , \quad z \neq \infty \quad (m \in \mathbb{N}) \\ \infty & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist meromorph mit einem Pol in ∞ .

(3) Seien $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ mit P, Q teilerfremd. Die rationale Funktion $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$

$$R(z) = \begin{cases} \frac{P(z)}{Q(z)} & , \quad z \in \mathbb{C}, Q(z) \neq 0 \\ \infty & , \quad z \in \mathbb{C}, Q(z) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist meromorph in $\widehat{\mathbb{C}}$.