13. Vorlesung, 14.06.2017

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, so dass $D \cup \{\infty\}$ eine Umgebung von ∞ ist und sei $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$. Wir nehmen an, dass es ein $r > 0$ existiert mit f holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Betrachte die holomorphe Funktion $g : B_{1/r}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$. Dann gilt:

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorph $\iff$ $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{\infty\})$ und g hat eine hebbare Singularität in 0 mit $g(0) = f(\infty)$.

$f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph $\iff$ $f \in \mathcal{M}(D \setminus \{\infty\})$ und g hat einen Pol in 0.

2.7.14. **Definition.** Wir sagen, dass $f \in \mathcal{M}(D)$ eine ***Nullstelle (Pol) von Ordung*** p ***in*** ∞ hat, wenn dies für g in 0 der Fall ist. Wir sagen, dass f ***in*** ∞ ***eine wesentliche Singularität*** hat, wenn dies für g in 0 der Fall ist.

Beispiele.

(1) Ein Polynom vom Grad $m \geqslant 1$, $P : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ hat einen Pol der Ordnung m in ∞.

(2) $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ hat eine wesentliche Singularität in ∞.

(3) $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $z \mapsto z^p e^{\frac{1}{z}}$ hat in 0 eine wesentliche Singularität und in ∞ einen Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$.

Kurz gefasst: Definitionsgemäß hat $f(z)$ das gleiche Verhalten in ∞ wie $f\left(\frac{1}{z}\right)$ in 0.

2.8. Laurentreihen und Laurententwicklungen.

Eine holomorphe Funktion $f : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit isolierter Singularität lässt sich im Allgemeinen nicht in eine Taylorreihe entwickeln, aber in eine sogenannte Laurentreihe.

Beispiele.

(1) Hat f eine hebbare Singularität in z_0, so gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ in } B_r(z_0) \quad \text{(das ist wohl eine Taylorreihe).}$$

(2) Hat f einen Pol, so gilt $f = \dfrac{h}{(z - z_0)^p}$ mit $h(z_0) \neq 0$, also

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^p} \\ &= \frac{a_0}{(z - z_0)^p} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{p-1}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{(z - z_0)} + a_p + a_{p+1}(z - z_0) + \ldots\ , \end{aligned}$$

mit $a_0 \neq 0$.

(3)

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}\ , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ .$$

2.8.1. **Definition.** Eine ***Laurentreihe*** ist ein Paar von Reihen

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right),$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Wir schreiben dafür $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ heißt ***Hauptteil***, die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ***Nebenteil*** der Laurentreihe. Diese heißt *konvergent in* $z \in \mathbb{C}$ (*bzw. absolut konvergent, gleichmäßig oder normal konvergent in einer Menge*), wenn dies für den Hauptteil und Nebenteil der Fall ist. Der Grenzwert ist die Summe der entsprechenden Grenzwerte:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=-1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\ .$$

2.8.2. **Satz.** *Ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ auf $B_{1/r}(0)$ und die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ auf $B_R(0)$ konvergent, dann konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolut auf dem Ringgebiet $K_{r,R}(z_0) = \{z : r < |z-z_0| < R\}$ und normal (also gleichmäßig) auf jedem Ringgebiet $\overline{K}_{\varrho,\sigma} = \{z : \varrho \leqslant |z-z_0| \leqslant \sigma\}$, wobei $r < \varrho < \sigma < R$.*
Die Summe der Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^n$ ist holomorph in $K_{r,R}(z_0)$.

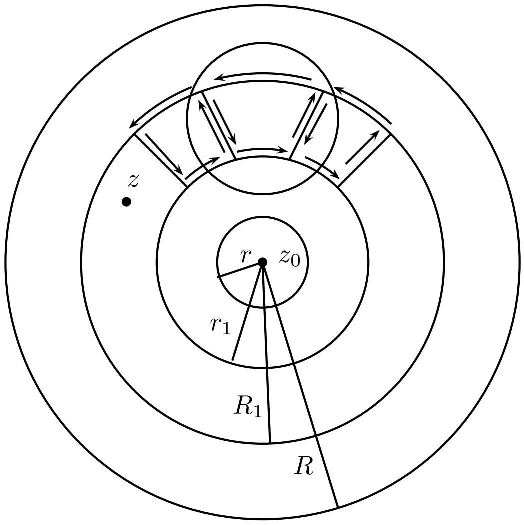
2.8.3. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für Ringgebiete)**.**
Sei g holomorph im Ringgebiet

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\} \quad (0 \le r < R \le +\infty\,,\ z_0 \in \mathbb{C})\ . \tag{2.15}$$

Dann gilt für alle $r < r_1 < R_1 < R$

$$\int\limits_{|\zeta-z_0|=r_1} g(\zeta)\,d\zeta \ = \int\limits_{|\zeta-z_0|=R_1} g(\zeta)\,d\zeta\ . \tag{2.16}$$

Beweis:
Wir führen geschlossene Kurven wie in Figur ein, die in Sterngebieten (eigentlich Kreisscheiben) verlaufen. Auf diese Kurven wenden wir den Cauchyschen Integralsatz an. Durch Addition der Integrale erhalten wir (2.16)



□

2.8.4. **Satz** (Cauchysche Integralformel für Ringgebiete)**.** *Sei f holomorph im Ringgebiet* (2.15). *Dann gilt für alle $z \in K_{r_1,R_1}(z_0)$ mit $r < r_1 < R_1 < R$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = R_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \,. \tag{2.17}$$

Beweis:
OBdA $z_0 = 0$. Seien z, r_1, R_1 wie oben fest. Wir wenden (2.16) für die holomorphe Funktion an:

$$g : K_{r,R}(0) \to \mathbb{C} \quad , \quad g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z \,. \end{cases}$$

Es ist

$$\int\limits_{|\zeta| = R_1} g(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{|\zeta| = R_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \underbrace{\int\limits_{|\zeta| = R_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{2\pi i \text{ da } |z| < R_1} = \int\limits_{|\zeta| = R_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i\, f(z) \,,$$

$$\int\limits_{|\zeta| = r_1} g(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta| = r_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \underbrace{\int\limits_{|\zeta| = R_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{0 \text{ da } |z| > r_1} = \int\limits_{|\zeta| = r_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \,.$$

□

2.8.5. **Satz** (Laurententwicklung)**.** *Sei f holomorph in einem Ringgebiet* (2.15). *Dann hat f eine Laurententwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \; z \in K_{r,R}(z_0) \,. \tag{2.18}$$

Dabei sind a_n, $n \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt durch

(2.19)
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, , \; r < \varrho < R \, .$$

Beweis:
OBdA $z_0 = 0$. Es ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = r_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{z\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n f(\zeta)\, d\zeta$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = r_1} f(\zeta) \zeta^n \, d\zeta \right) z^{-(n+1)}$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \quad , \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = r_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{-n+1}} \, .$$

Wegen $|\zeta| = r_1 < |z|$ konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $\{|\zeta| = r_1\}$ und die gliedweise Integration ist erlaubt.
Wie im Potenzreihenentwicklungssatz erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = R_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = R_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

Aus (2.15) erhalten wir (2.18). Allerdings haben wir in (2.19) nun $\varrho = r_1$ bzw. $\varrho = R_1$. Den allgemeinen Fall erhalten wir wegen (2.16) für $g(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$:
Für alle $r < \varrho < \sigma < R$ gilt

$$\int\limits_{|\zeta| = \varrho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} = \int\limits_{|\zeta| = \sigma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \, .$$

$\square$