14. Vorlesung, 19.06.2017

2.8.6. **Satz** (Laurentzerlegung). *Sei f holomorph in* (2.15). *Dann existieren eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen $g : B_R(0) \to \mathbb{C}$, $h : B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$, so dass*

$$f(z) = g(z - z_0) + h\left(\frac{1}{z - z_0}\right), \ z \in K_{r,R}(z_0) \ \textit{und} \ h(0) = 0 \ .$$

Beweis:

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad , \quad h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

Eindeutigkeit: Übung. □

2.8.7. **Satz** (Klassifizierung der isolierten Singularitäten).
Sei z_0 eine isolierte Singularität der Funktion f und sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Laurententwicklung von f in einem Kreisring $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Die Singularität ist:

(a) *hebbar* $\iff$ $a_n = 0$ *für alle* $n < 0$.
(b) *Pol der Ordnung* m $\iff$ $a_n = 0$ *für alle* $n < -m$, $a_{-m} \neq 0$.
(c) *wesentlich* $\iff$ $a_n \neq 0$ *für unendlich viele* $n < 0$.

Beweis: Übung. □

Sei f meromorph in G und $a \in G$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, eine Umgebung $U \subset G$ von a und eine holomorphe Funktion h in U mit

$$f(z) = (z - a)^n \cdot h(z) \quad \text{und} \quad h(a) \neq 0 \ .$$

h erhählt man, wenn man die Laurent–Entwicklung von f um a betrachtet:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - a)^k = (z - a)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} (z - a)^k = (z - a)^n \cdot h(z) \ .$$

Es gilt $h(a) = a_n \neq 0$ und $n = \operatorname{ord}_a f$. Weiter erhält man

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)} \ .$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ klein genug, dass $h(z) \neq 0$ in $B_{2\varepsilon}(a)$. Dann folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{n}{z - a} dz + \int_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 2\pi i \cdot n \ .$$

2.9. **Folgen holomorpher Funktionen.** Wir erinnern uns den folgenden Satz aus Analysis II:

2.9.1. **Satz** (Vertauschung von Grenzwert und Differentiation). *Sei $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:*

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *punktweise,*
(2) f_n *stetig differenzierbar,*
(3) $(f'_n)_n$ *konvergiert gleichmäßig auf* $[a, b]$.

Dann ist f auch differenzierbar, und es gilt $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$.

Die wesentliche Voraussetzung hier ist (3), wie das folgende Beispiel zeigt: Seien

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x + \frac{1}{n^n}}\,.$$

Für alle $x \in [0,1]$ gilt $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(1) < \frac{2}{n}$, also $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 =: f(x)$ gleichmäßig. Es gilt $f_n'(x) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}(x+\frac{1}{n^n})^{\frac{1}{n}-1}$. Daraus folgt $f_n'(0) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{n^{1-n}} = \frac{n^{n-1}}{n^2} = n^{n-3} \longrightarrow \infty$. Also $f'(0) \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(0)$. Hier konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig, jedoch nicht $f_n' \to f'$.

Wir können sogar eine ***stetige, nirgends differenzierbare Funktion*** als gleichmäßigen Limes von stetigen Funktionen konstruieren. Wir formulieren das als eine Übung. Für mehr dazu siehe Walter, Analysis I, S. 353, 359.

Aufgabe. (a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Seien $a_n \to x_0$ und $b_n \to x_0$ Folgen in I mit $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ und $a_n < b_n$ für alle n. Zeigen Sie: $d_n := \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} \to f'(x_0)$ für $n \to \infty$.
(Tipp: Mit $f(x) = f(x_0) + r(x)(x-x_0)$ liegt d_n zwischen $r(a_n)$ und $r(b_n)$, warum?)
(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt: Ist $1 \leqslant m \leqslant 2^n$ und $x \in \left[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right]$, so sei $f_n(x) := x - \frac{m-1}{2^n}$ für ungerades m und $f_n(x) := \frac{m}{2^n} - x$ für gerades m. Man überzeugt sich leicht, dass f_n wohldefiniert und stetig ist.

(i) Skizzieren Sie f_1, f_2, f_3, f_4 und $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} f_k$.

(ii) Zeigen Sie, dass $f := \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert und stetig ist.

(iii) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $[a_n, b_n]$ ein Intervall der Form $\left[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right]$ (wie oben), das x_0 enthält. Zeigen Sie: $\dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$ ist für gerades n gerade und für ungerades n ungerade, und f ist in x_0 nicht differenzierbar.

Die Funktion f ist also stetig, aber nirgends differenzierbar.

Wir werden sehen, dass in der Theorie der holomorphen Funktionen die Bedingung (3) aus Satz 2.9.1 überflüssig ist, wenn die Folge f_n gleichmäßig konvergiert. Die springende Punkte sind, dass

- wegen der Cauchy-Formel, ist der gleichmäßige Grenzwert holomorpher Funktionen wieder holomorph,
- bei holomorphen Funktionen erlauben die Cauchy-Abschätzungen eine Kontrolle der Ableitungen durch die Funktion.

2.9.2. **Definition.** Sei D eine offene Menge, $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass (f_n) lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert, wenn es zu jedem $a \in D$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f_n \to f$, $n \to \infty$ gleichmäßig in $B_\delta(a)$.

2.9.3. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Genau dann gilt $f_n \to f$, $n \to \infty$ lokal gleichmäßig in D, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset D$ gilt $f_n \to f$, $n \to \infty$ gleichmäßig in K.*

2.9.4. **Beispiel.** Sei $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = z^n$. Dann $f_n \to 0$, $n \to \infty$ wegen $|f_n(z)| \leq r^n$ für $|z| \leq r$ und $r^n \to 0$, $n \to \infty$ für $r < 1$. Aber f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0, da $\|f_n\|_{\mathbb{D}} = \sup_{\mathbb{D}} |f_n| = 1$. Also ist die lokal gleichmäßige Konvergenz eine schwächere Forderung als die gleichmäßige Konvergenz.

2.9.5. **Satz** (Weierstraßscher Konvergenzsatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n \in \mathcal{O}(D)$ und $f_n \to f$, $n \to \infty$, lokal gleichmäßig in D. Dann ist $f \in \mathcal{O}(D)$ und für die Ableitungen hat man auch $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$, $n \to \infty$, lokal gleichmäßig für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Zu $z_0 \in D$ wählen wir $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset D$, also

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f_n(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } z \in B_r(z_0) \qquad \text{(Cauchy Integralformel)} \ .$$

Für $z \in B_r(z_0)$ fest, $\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \to \frac{f(z)}{\zeta - z}$, $n \to \infty$, gleichmäßig auf $\partial B_r(z_0)$, können wir Integral und Grenzwert vertauschen und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \quad , \quad z \in B_r(z_0) \ .$$

Daraus folgt, dass f holomorph ist (siehe z.B. 2.3.9).
Sei nun $K \subset D$ kompakt, $0 < r < d(K, \partial D)$, $K(r) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \leq r\}$. Nach Satz 2.5.6 (Cauchysche Abschätzungen) gilt:

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_K \leq \frac{k!}{r^k} \|f_n - f\|_{K(r)} \to 0 \ , \ \ n \to \infty \ .$$

$\square$

2.9.6. **Satz.** *Seien $g_n \in \mathcal{O}(D)$ holomorph und die Reihe $\sum\limits_{n \geq 0} g_n$ konvergiere lokal gleichmäßig in D. Dann ist $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(z)$, holomorph und für $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}(z)$ für $z \in D$.*

2.9.7. **Definition.** Seien $g_n : D \to \mathbb{C}$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n \geq 0} g_n$ *lokal normal*, wenn für jedes $a \in D$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{B_\delta(a)} < \infty$.
Dann konvergiert $\sum\limits_{n \geq 0} g_n$ auch lokal gleichmäßig.

2.9.8. **Satz.** *Die Reihe $\sum\limits_{n \geq 0} g_n$, $g_n \in \mathcal{O}(D)$, konvergiere lokal normal in D. Dann ist $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ ebenfalls holomorph.*

Beispiel. Die *Riemannsche ζ–Funktion* ist definiert durch

$$\zeta : \{\operatorname{Re} s > 1\} \to \mathbb{C} \quad , \quad \zeta(s) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ .$$

Die Reihe konvergiert normal in jeder Halbebene $\{\operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.
ζ ist somit holomorph.