15. Vorlesung, 21.06.2017

3. Die allgemeine Cauchy–Theorie

Der Integralsatz und die Integralformel wurden für Sterngebiete bewiesen.
Frage: Sei D ein beliebiges Gebiet. Für welche Kurven $\gamma \subset D$ gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{O}(D)\ ?$$

Antwort: Es sind genau die geschlossenen Kurven, deren Inneres in D liegt.

3.1. **Homologieversion der Cauchyschen Sätze.**

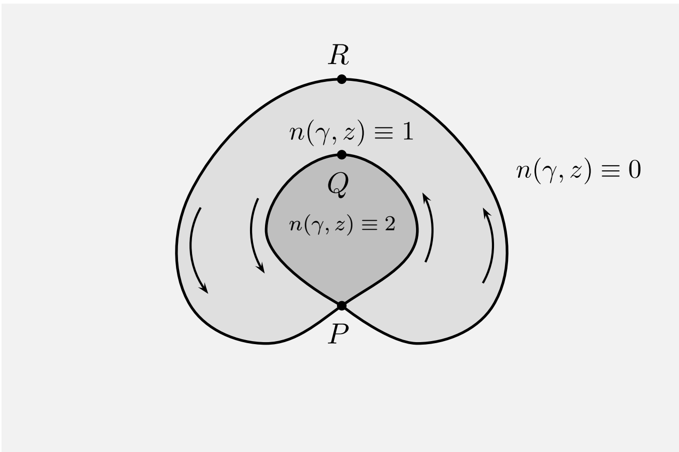
Für eine geschlossene Kurve γ und $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ wurde die Windungszahl definiert durch

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\ .$$

3.1.1. **Satz** (Eigenschaften der Windungszahl)**.**

(i) $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ *für* $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$.
(ii) $\mathbb{C} \setminus |\gamma| \ni z \mapsto n(\gamma, z)$ *ist lokal–konstant.*
(iii) $n(\gamma, z) = 0$ *für* z *in der unbeschränkten Komponente von* $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

Als Beispiel betrachte die Kurve $PQPRP$:



3.1.2. **Definition.** Ist γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$, so heißen

$$\operatorname{Int}\gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \,:\, n(\gamma, z) \neq 0\} \quad \text{das *Innere* von } \gamma \text{ und}$$

$$\operatorname{Ext}\gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \,:\, n(\gamma, z) = 0\} \quad \text{das *Äußere* von } \gamma\ .$$

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt γ *nullhomolog in* D, wenn $\operatorname{Int}\gamma \subset D$.

Bemerkung. γ ist nullhomolog in D, wenn es keinen Punkt des Komplements von D umläuft.

$$\operatorname{Int}\gamma \subset D \iff \big(n(\gamma, z) \neq 0 \Rightarrow z \in D\big) \iff \big(z \notin D \Rightarrow n(\gamma, z) = 0\big)$$

3.1.3. **Lemma.**

(i) *Sei γ eine stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve und $\varphi : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist*

$$F : \mathbb{C} \setminus |\gamma| \to \mathbb{C} \quad , \quad F(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

holomorph.

(ii) *Sei D ein Gebiet. Sei $g : D \times D \to \mathbb{C}$ stetig und $g(\zeta, z)$ holomorph in z für jedes $\zeta \in D$. Dann ist*

$$G(z) = \int_\gamma g(\zeta, z)\, d\zeta$$

holomorph.

Beweis: (i) Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ fest. Dann gilt

$$F(z) - F(z_0) = \int_\gamma \frac{(z - z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\, d\zeta \quad \text{und daher}$$

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{(z - z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta \, .$$

Sei $r = d(z_0, \gamma) > 0$. Für $|z - z_0| \le r/2$ gilt $|\zeta - z| \ge r/2$ für $\zeta \in |\gamma|$. Die Standardabschätzung für Integrale liefert

$$\left| \int_\gamma \frac{(z - z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta \right| \le \frac{2|z - z_0|}{r^3} \cdot \max_\gamma |\varphi| \cdot \ell(\gamma) \, ,$$

und für $z \to z_0$ strebt dies gegen 0. Also existiert $F'(z_0)$ und hat den behaupteten Wert. Somit ist F holomorph.

(ii) Zu zeigen (Morera): Für jedes Dreieck $\Delta \subset\subset D$ gilt $\int_{\partial\Delta} G(z)\, dz = 0$.

$$\int\limits_{\partial\Delta} G(z)\, dz = \int\limits_{\partial\Delta} \int_\gamma g(\zeta, z)\, d\zeta\, dz = \int\limits_\gamma \int\limits_{\partial\Delta} g(\zeta, z)\, dz\, d\zeta = 0 \, ,$$

denn das innere Integral verschwindet (Goursat), da $g(\zeta, z)$ holomorph in z ist. □

3.1.4. **Definition.**

(i) Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ geschlossene Kurven, so nennt man die formale Summe $\Gamma := \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ einen *Zyklus* und $|\Gamma| := |\gamma_1| + \ldots \cup |\gamma_n|$ seinen Träger.
Ist $f : |\Gamma| \to \mathbb{C}$ stetig, dann definiert man

$$\int\limits_\Gamma f(z)\, dz := \sum_{j=1}^n \int\limits_{\gamma_j} f(z)\, dz \quad \text{und} \quad n(\Gamma, z) := \sum_{j=1}^n n(\gamma_j, z) \, , \; z \notin |\Gamma| \, .$$

(ii) Sei Γ ein Zyklus in einem Gebiet D. Dann heißt Γ *nullhomolog in D*, wenn $n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \notin D$.
Zwei Zykel Γ_1, Γ_2 heißen *homolog in D*, wenn $n(\Gamma_1, z) = n(\Gamma_2, z) \;\forall\, z \notin D$.

(iii) Ein Zyklus Γ in D heißt *Randzyklus* von (der offenen Menge) $V \subset\subset D$, wenn

$$\partial V = |\Gamma| \quad , \quad n(\Gamma, z) = 1 \quad \forall\, z \in V \quad , \quad n(\Gamma, z) = 0 \quad \forall\, z \notin \overline{V} \, .$$

Analog wird eine *Randkurve* γ definiert als einfach geschlossene Kurve, die V berandet.

3.1.5. **Satz.** *Sei D ein Gebiet und $\Gamma \subset D$ Zyklus in D. Dann sind äquivalent:*

(i) *Für alle $f \in \mathcal{O}(D)$ gilt $\int\limits_\Gamma f(z)\, dz = 0$ (Cauchy-Integralsatz),*

(ii) *Für alle $f \in \mathcal{O}(D)$ gilt die Cauchy-Formel*

$$n(\Gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad z \in D \setminus |\Gamma|\,,$$

(iii) $\operatorname{Int}\Gamma \subset D$*, d.h.* Γ *ist nullhomolog in* D*.*

Beweis:
(i)$\Rightarrow$(ii):
Sei $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$, $\zeta \in D \setminus \{z\}$, und $g(z) = f'(z)$. Dann ist g holomorph in D und

$$0 = \int\limits_{\Gamma} g(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i \cdot f(z) \cdot n(\Gamma, z)\ ,\ z \in D \setminus |\Gamma|\ .$$

(ii)$\Rightarrow$(i):
Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ und $z \in D \setminus |\Gamma|$. Dann ist $h(\zeta) = (\zeta - z) \cdot f(\zeta) \in \mathcal{O}(D)$ mit $h(z) = 0$. Somit

$$0 = n(\Gamma, z) \cdot h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\, d\zeta\ .$$

(i)$\Rightarrow$(iii):
Sei $z \notin D$. Dann gilt

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0\ , \quad \text{da} \quad f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z} \in \mathcal{O}(D)\ , \quad \text{wenn } z \notin D\ .$$

(iii)$\Rightarrow$(ii):
Sei $f \in \mathcal{O}(D)$. Zeige: $\quad \operatorname{Int}\Gamma \subset D \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \quad .$

Definiere $g : D \times D \to \mathbb{C}$,

$$g(\zeta, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z\ . \end{cases}$$

Dann ist zu zeigen, dass

(1) g stetig ist und $g(\zeta, z)$ holomorph in z.
(2) Dann folgt mit Lemma 3.1.3(ii), dass $G(z) = \int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta$ holomorph ist.
(3) $G = F|_D$ ist Einschränkung einer ganzen Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
(4) F ist beschränkt und sogar $F(z) \to 0$ für $z \to \infty$.
Dann folgt (Liouville) $F \equiv 0$.

Zu (1), $g(\zeta, z)$ ist holomorph in z und in ζ.
Für die Stetigkeit auf der Diagonalen sei $(z_0, z_0) \in D \times D$. Für $(\zeta, z) \in B_\delta(z_0) \times B_\delta(z_0)$ betrachte

$$g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) = \frac{1}{\zeta - z} \int\limits_{[\zeta, z]} \big(f'(w) - f'(z_0)\big)\, dw\ .$$

Nun ist f' stetig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so, dass $|f'(w) - f'(z_0)| < \varepsilon$ in $B_\delta(z_0)$.
Somit gilt auch (2).
Für (3) setze

$$F(z) = \begin{cases} G(z) & , \quad z \in D \\ H(z) & , \quad z \in \operatorname{Ext}\Gamma\ , \end{cases}$$

wobei $H(z) := \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ holomorph ist nach Lemma 3.1.3(i).
F ist wohldefiniert, da $G(z) = H(z)$ für $z \in D \cap \operatorname{Ext}\Gamma$. Aus der Voraussetzung $\operatorname{Int}\Gamma \subset D$ folgt nun $D \cup \operatorname{Ext}\Gamma = \mathbb{C}$, d.h. F ist eine ganze Funktion.
Zu (4): Für $R > \max|\Gamma|$ und $|z| > R$ gilt

$$|F(z)| = |H(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \ell(\Gamma) \cdot \max_\Gamma |f| \cdot \frac{1}{d(z,\Gamma)} \longrightarrow 0 \quad (z \to \infty)\ .$$

□

3.1.6. **Definition.** Sei U offen und $a \in U$. Sei $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $r > 0$, so dass $\overline{B}_r(a) \subset U$. Dann heißt

$$\operatorname{res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} f(z)\, dz$$

das *Residuum* von f in a.

Bemerkung.

(i) Ist $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$ die Laurent–Reihe um b, dann ist $\operatorname{res}_b f = a_{-1}$.

(ii) Ist f holomorph in a, dann ist $\operatorname{res}_a f = 0$.

(iii) Sei $h(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-b)^n$ ein Hauptteil um b und $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{b\}$ eine geschlossene Kurve. Dann ist $h : \mathbb{C} \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma h(z)\, dz = \frac{a_{-1}}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{dz}{z-b} = a_{-1} \cdot n(\gamma, b) = n(\gamma, b) \cdot \operatorname{res}_b h\ .$$

(iv) Ist a außerwesentliche Singularität von $f \not\equiv 0$, dann ist

$$\operatorname{ord}_a f = \operatorname{res}_a \left(\frac{f'}{f} \right) .$$