16. Vorlesung, 26.06.2017

3.1.6. **Definition.** Sei U offen und $a \in U$. Sei $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $r > 0$, so dass $\overline{B}_r(a) \subset U$. Dann heißt

$$\operatorname{res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} f(z)\, dz$$

das *Residuum* von f in a.

Bemerkung.

(i) Ist $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$ die Laurent–Reihe um b, dann ist $\operatorname{res}_b f = a_{-1}$.

(ii) Ist f holomorph in a, dann ist $\operatorname{res}_a f = 0$.

(iii) Sei $h(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-b)^n$ ein Hauptteil um b und $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{b\}$ eine geschlossene Kurve. Dann ist $h : \mathbb{C} \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} h(z)\, dz = \frac{a_{-1}}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-b} = a_{-1} \cdot n(\gamma, b) = n(\gamma, b) \cdot \operatorname{res}_b h\,.$$

(iv) Ist a außerwesentliche Singularität von $f \not\equiv 0$, dann ist

$$\operatorname{ord}_a f = \operatorname{res}_a \left(\frac{f'}{f} \right).$$

3.1.7. **Satz** (Residuensatz). *Sei D ein Gebiet, $S \subset D$ eine diskrete Menge in D und $f : D \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine geschlossene Kurve in $D \setminus S$ mit $\operatorname{Int} \gamma \subset D$ (d.h. γ ist nullhomolog in D). Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{z \in \operatorname{Int} \gamma} n(\gamma, z) \cdot \operatorname{res}_z f\,.$$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{rcl} z \in D \setminus S & \Rightarrow & \operatorname{res}_z f = 0 \\ \overline{\operatorname{Int} \gamma} \text{ ist kompakt} & \Rightarrow & \operatorname{Int} \gamma \cap S \text{ ist endlich} \end{array}\right\} \quad \text{Summe rechts ist endlich}$$

Sei $S \cap \operatorname{Int} \gamma = \{b_1, \dots, b_n\}$. Seien

$$h_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)} (z - b_j)^n$$

die Hauptteile von f um b_j. Dann ist $f - \sum\limits_{j=1}^{n} h_j$ holomorph in einer Umgebung V von $\overline{\operatorname{Int} \gamma}$. Wegen $\operatorname{Int} \gamma \subset V$ folgt mit dem Cauchy–Integralsatz

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\gamma} h_j(z)\, dz \\ &= \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz - 2\pi i \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, b_j) \cdot \operatorname{res}_{b_j} f\,. \end{aligned}$$

$\square$

3.1.8. **Satz** (Residuensatz für Zykel). *Sei D ein Gebiet, $S \subset D$ eine diskrete Menge in D und $f : D \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\Gamma \subset D \setminus S$ nullhomologer Zyklus in D. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = \sum_{z \in \operatorname{Int}\Gamma} n(\Gamma, z) \cdot \operatorname{res}_z f \;. \tag{3.1}$$

Ist Γ Randzyklus von $V \Subset D$, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = \sum_{z \in V} \operatorname{res}_z f \;. \tag{3.2}$$

3.1.9. **Definition.** Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$\nu_f(a) := \operatorname{ord}_a(f - f(a))$$

die Vielfachheit, mit der a auf $f(a)$ abgebildet wird.

Ist f konstant, dann $\nu_f(a) = \infty$. Ansonsten gibt es ein $n \geq 1$, so dass in der Nähe von a gilt $f(z) = f(a) + (z-a)^n g(z)$ mit g holomorph in a und $g(a) \neq 0$. Dann ist $\nu_f(a) = n$. Für $n = 1$ gilt $g(a) = f'(a)$.

Bemerkung.

(i) $\nu_f(a) \geq 1 \quad , \quad \nu_f(a) = 1 \iff f'(a) \neq 0\,.$

(ii) Ist f nicht–konstant so gilt

$$\nu_f(a) = \operatorname{res}_a \left(\frac{f'}{f - f(a)} \right) \;. \tag{3.3}$$

(iii) $N_f(w) = \sum\limits_{z \in f^{-1}(w)} \nu_f(z)$ ist die Anzahl der w–Stellen in G mit Vielfachheit.

Aus dem Residuensatz folgt sofort:

3.1.10. **Satz** (Argumentprinzip). *Sei G Gebiet und f holomorph in G. Seien $a_1, a_2, \dots$ die paarweise verschiedenen w–Stellen von f und $\Gamma \subset G$ nullhomologer Zyklus in G mit $a_\mu \notin |\Gamma|$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \sum_{\mu} n(\Gamma, a_\mu) \cdot \nu_f(a_\mu) \;. \tag{3.4}$$

Ist Γ Randzyklus von $V \Subset G$, dann ist dies die Anzahl $N_f(w, V)$ der w–Stellen in V:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = N_f(w, V)\,. \tag{3.5}$$

Ist γ die Randkurve von $V \Subset G$, so gilt

$$N_f(w, V) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = n(f \circ \gamma, w)\,, \tag{3.6}$$

also läuft die Bildkurve $f \circ \gamma$ so oft um den Punkt w wie w–Stellen in V liegen.

Beweis: Die Formel (3.4) folgt aus (3.1) angewandt auf $\frac{f'}{f-w}$ und (3.3). Die Formel (3.5) folgt aus (3.2) und (3.3). Die Gleichheit (3.6) folgt aus der folgenden Bemerkung. Sei f holomorph in G und γ geschlossene Kurve in G. Sei $w \notin f(|\gamma|)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f \circ \gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = n(f \circ \gamma, w)\;.$$

□

Aus (3.6) wird ersichtlich, warum Satz 3.1.10 Argumentprinzip genannt wird. Die Windungszahl $n(f \circ \gamma, w)$ gibt bis aus den Faktor 2π die Gasamtänderung des Argumentes der Funktion $f \circ \gamma(t) - w$ an, wenn t das Definitionsintervall von γ durchläuft.

Bemerkung. Ist f meromorph mit den Polstellen $b_1, b_2, \ldots$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \sum_{\mu} n(\Gamma, a_\mu) \cdot \nu_f(a_\mu) + \sum_{\nu} n(\Gamma, b_\nu) \cdot \mathrm{ord}_{b_\nu} f \; .$$

Ist Γ Randzyklus, so muß man also noch die Anzahl der Polstellen $N_f(\infty, V)$ in V abziehen:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = N_f(w, V) - N_f(\infty, V)\, .$$

3.1.11. **Satz** (Rouché)**.** *Seien f, g holomorph in G und Γ Randzyklus von $V \Subset G$. Gilt $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in |\Gamma|$, so haben f und g gleichviele Nullstellen in V (mit Vielfachheit).*

Beweis: Sei $h_\lambda = f + \lambda(g - f)$, $\lambda \in [0, 1]$. Dann ist $h_0 = f$ und $h_1 = g$. Wegen

$$|\lambda(g(z) - f(z))| \leq |g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \text{für } z \in |\Gamma|$$

ist $h_\lambda(z) \neq 0$ auf $|\Gamma|$. Somit ist die Anzahl der Nullstellen in V

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z) + \lambda(g'(z) - f'(z))}{f(z) + \lambda(g(z) - f(z))}\, dz \; .$$

Nun hängt N_λ stetig von λ ab, und da $N_\lambda \in \mathbb{Z}$, folgt $N_0 = N_1$. □

Es gibt eine Version des Satzes von Rouché für meromorphe Funktionen: Seien f, g meromorph in G und Γ Randzyklus von $V \Subset G$. Gilt $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in |\Gamma|$, so gilt $N_f(0, V) - N_f(\infty, V) = N_g(0, V) - N_g(\infty, V)$.
Wir geben zwei Anwendungen des Satzes von Rouché. Es kommt darauf an, bei vorgegebener Funktion f eine Vergleichsfunktion g mit bekannter Nullstellenzahl so zu finden, dass die Ungleichung im Satz von Rouché erfüllt ist.

3.1.12. **Satz** (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Ein nicht konstantes Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis:
O.b.d.A. sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$, $n \geq 1$.
Setze $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = P(z)$, $g(z) = z^n$. Für $r > 0$ hinreichend groß gilt

$$|f(w) - g(w)| = |a_{n-1}w^{n-1} + \ldots + a_0| < |w^h| = g(w) \; ,$$

da

$$\lim_{w \to \infty} \frac{a_{n-1}w^{n-1} + \ldots + a_0}{w^n} = 0 \; .$$

Also folgt: $N_f(0, B_r(0)) = N_g(0, B_r(0)) = n$,
$N_f(0, D) =$ Anzahl der Nullstellen von f in D. □

Einen anderen Beweis haben wir in 2.5.4 mit Hilfe des Satzes von Liouville gegeben.

3.1.13. **Satz** (Hurwitz I). *Eine Folge $f_n \in \mathcal{O}(D)$ konvergiere lokal gleichmäßig im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ gegen $f \in \mathcal{O}(D)$, Es sei U beschränkt und offen mit $\overline{U} \subset D$, so dass f keine Nullstelle auf ∂U hat. Dann gibt es einen Index $m_U \in \mathbb{N}$, so dass alle Funktionen f, f_n mit $n \geq n_U$ in $\overline{U}$ gleich viele Nullstellen haben.*

Beweis:
Schritt 1: $U = B_r(z_0)$. Es gilt $\varepsilon = \min\{|f(z)| : z \in \partial U\} > 0$. $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\partial U \Rightarrow \exists n_U$, so dass $\|f_n - f\|_{\partial U} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_U \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \partial U$, $n \geq n_U$. Rouché $\Rightarrow$ Behauptung.
Schritt 2: U beliebig. $\overline{U}$ kompakt $\Rightarrow$ f hat in $\overline{U}$ nur endlich viele Nullstellen (Identitätssatz). Sie liegen alle in $U = \overline{U} \setminus \partial U$, es gibt also paarweise disjunkte Kreisscheiben $U_1, \ldots, U_k$ in U, so dass f in $K = \overline{U} \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_k)$ nicht verschwindet. Da $f_n \to f$ gleichmäßig auf K, sind fast alle f_n Nullstellen-frei in K.
Schritt 1 $\Rightarrow$ für fast alle f_n gilt $N_{f_n}(0, U_j) = N_f(0, U_j)$ also $N_{f_n}(0, U) = N_f(0, U)$. □

3.1.14. **Satz** (Hurwitz II). *Es sei $f_n \in \mathcal{O}(D)$ eine Folge von injektiven Funktionen, die in D gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{O}(D)$ konvergiert. Dann ist f entweder konstant oder injektiv.*

Beweis:
Angenommen f ist weder injektiv noch konstant. Seien $a, b \in D$ mit $a \neq b$, $f(a) = f(b)$. Sei $r > 0$ mit $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$. Die Funktion $f - f(a)$ hat Nullstellen in a und b und ist nicht identisch mit Null. Nach 3.1.13 haben fast alle Funktionen $f_n - f(a)$ fast gleich viele Nullstellen in $B_r(a)$ und $B_r(b)$, d.h. f_n nimmt den Wert $f(a)$ in zwei verschiedenen Stellen an. Widerspruch. □