17. Vorlesung, 28.06.2017

3.2. **Anwendung des Residuensatzes auf die Berechnung von Integralen.** Zunächst betrachten wir *trigonometrische Integrale*.

3.2.1. **Satz.** *Sei $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion. Q habe keine Nullstelle auf $|z| = 1$. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \sum_{w \in \mathbb{D}} \operatorname{res}_w \widetilde{R}$$

mit $\widetilde{R}(z) = \frac{1}{z} R\big(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\big)$.

Beweis:
Sei $z \in S^1$, $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$. Dann

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \quad , \quad \sin t = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big) \,,$$

also

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int\limits_{\partial \mathbb{D}} R\left(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\right) \frac{1}{iz}\, dz = \frac{1}{i} 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{D}} \operatorname{res}_w \widetilde{R} \,.$$

$\square$

Beispiel. Sei $w \in \mathbb{C}$, $|w| \neq 1$. Für $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2w\cos t + w^2} = I$ gilt

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \frac{1}{1 - 2wx + w^2} \,, \\ \widetilde{R}(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 - 2w\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + w^2} = \frac{1}{z} \frac{z}{z - wz^2 - w + w^2 z} = \frac{1}{(z - w)(1 - wz)} \,. \end{aligned}$$

$\widetilde{R}$ hat genau einen Pol in $\mathbb{D}$, nämlich w falls $|w| < 1$ oder $\frac{1}{w}$, falls $|w| > 1$. Ist $|w| < 1$, so ist

$$\operatorname{res}_w \widetilde{R} = \lim_{z \to w} (z - w)\widetilde{R}(z) = \frac{1}{1 - w^2} \,.$$

Ist $|w| > 1$, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_w \widetilde{R} &= \lim_{z \to \frac{1}{w}} \Big(z - \frac{1}{w}\Big)\widetilde{R}(z) \\ &= \lim_{z \to \frac{1}{w}} \frac{zw - 1}{w} \cdot \frac{1}{(z - w)(1 - wz)} \\ &= -\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\frac{1}{w} - w} = \frac{1}{w^2 - 1} \\ \Rightarrow \quad I &= \begin{cases} \frac{2\pi}{1 - w^2} & , \ |w| < 1 \\ \frac{2\pi}{w^2 - 1} & , \ |w| > 1 \,. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun *uneigentliche Integrale*.

3.2.2. **Satz.** *Sei f holomorph in $D \setminus F$, wobei $D \supset \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, F endlich und $F \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Es existiere $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ und es sei $\lim\limits_{z \to \infty} z f(z) = 0$. Dann gilt:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} w > 0} \operatorname{res}_w f$$

Beweis: Sei $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = re^{it}$. Dann gilt

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{\gamma(r)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} w > 0} \operatorname{res}_w f$$

für r genügend groß. Standardabschätzung $\Rightarrow$

$$\Big| \int_{\gamma(r)} f(z)\,dz \Big| \le \sup_{\gamma(r)} |f| \cdot \pi r \to 0 \quad , \quad r \to \infty \,.$$

□

3.2.3. **Folgerung.** *Sei* $R = \frac{P}{Q}$ *eine rationale Funktion, so dass* Q *keine reelle Nullstelle hat und* $\operatorname{grad} Q \ge \operatorname{grad} P + 2$*. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\ w > 0} \operatorname{res}_w R \,.$$

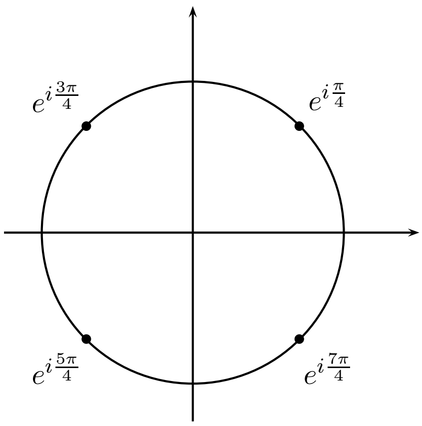
Beweis: $\operatorname{grad} Q \ge \operatorname{grad} P + 2 \Rightarrow |R(z)| = O\big(\frac{1}{|z|^2}\big)$, also $\lim_{z \to \infty} zR(z) = 0$. □

Beispiel.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\,dx \,.$$

Betrachte $R(z) = \dfrac{z^2}{1 + z^4}$.
Die Nullstellen des Nenners sind die 4-ten Wurzeln von -1:

$$\left\{ e^{i\frac{(\pi + 2k\pi)}{4}} : k = 0, 1, 2, 3 \right\} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}$$



Für $w = e^{i\frac{\pi}{4}}$ gilt:

$$\operatorname{res}_w f = \lim_{z \to w} (z - w) \cdot \frac{z^2}{1 + z^4} = \frac{w^2}{(1 + z^4)'|_{z = w}} = \frac{w^2}{4w^3} = \frac{1}{4w} = \frac{1}{4}\overline{w} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - i) \,.$$

Für $w_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = iw$ gilt:

$$\operatorname{res}_{w_1} f = \frac{w_1^2}{4w_1^3} = \frac{1}{4}\overline{w_1} = -\frac{i}{4}\overline{w} = -\frac{i}{4\sqrt{2}}(1 - i)$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\pi i \cdot \frac{(1 - i)^2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{i(1 - 2i - 1)}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \,.$$

□