18. Vorlesung, 03.07.2017

Wir wenden nun die Methode der Residuen für Integrale der Form

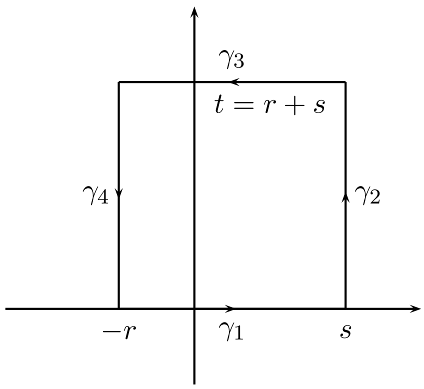
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}\,dx\,. \qquad (*)$$

an.

3.2.4. **Satz.**
Sei $F \subset \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ eine endliche Menge. Sei f holomorph in einer offenen Umgebung von $\overline{\mathbb{H}} \setminus F$, so dass $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Dann existiert für alle $\xi \in \mathbb{R}_+$ das uneigentliche Integral $(*)$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx = 2\pi i \sum_{w\in F} \operatorname{res}_w(f(z)e^{i\xi z}).$$

Beweis: Betrachte $r, s > 0$ und das Quadrat wie in der Skizze. Wir wählen r, s genügend groß, so dass $F \subset Q$.



Es gilt:

$$\begin{aligned}
2\pi i \sum_{w\in F} \operatorname{res}_w(f(z)e^{i\xi z}) &= \int_{\partial Q} f(z)e^{i\xi z}dz \\
&= \int_{-r}^{s} f(x)e^{i\xi z}dx + \int_{\gamma_2} f(z)e^{i\xi z}dz + \int_{\gamma_3} f(z)e^{i\xi z}dz + \int_{\gamma_4} f(z)e^{i\xi z}dz
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $\displaystyle\int_{\gamma_i} f(z)e^{i\xi z}dz \to 0$, wenn $r, s \to \infty$ für $i = 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\gamma_2} f(z)e^{i\xi z}dz\Big| = \Big|\int_0^t f(s+iu)e^{i\xi(s+iu)}du\Big| = \Big|\int_0^t f(s+iu)e^{i\xi s}e^{-\xi u}du\Big| \\
&\leqslant \|f(z)e^{i\xi s}\|_{|\gamma_2|}\int_0^t e^{-\xi u}du = \|f\|_{|\gamma_2|}\left(-\frac{1}{\xi}e^{-\xi u}\right)\Big|_0^t = \|f\|_{|\gamma_2|}\cdot\frac{1-e^{-t\xi}}{\xi} \\
&\leqslant \frac{1}{\xi}\|f\|_{|\gamma_2|} \to 0\,, \quad s \to \infty\,.
\end{aligned}$$

Analaog
$$\Big|\int\limits_{\gamma_4} f(z)e^{i\xi z}dz\Big| \le \frac{1}{\xi}\|f\|_{|\gamma_4|} \to 0\ , \quad r\to\infty$$
und
$$\Big|\int\limits_{\gamma_3} f(z)e^{i\xi z}dz\Big| \le \sup_{\operatorname{Im} z=t} |e^{i\xi z}f(z)|(r+s) = \underbrace{e^{-\xi t}\cdot t}_{\to 0}\underbrace{\sup_{\operatorname{Im} z=t}|f(z)|}_{\to 0} \to 0 \text{ für } t\to\infty\ .$$

$\square$

3.2.5. **Folgerung.** *Sei* $R=\frac{P}{Q}$ *eine rationale Funktion ohne reelle Polstellen und* $\deg Q \ge \deg P+1$. *Dann gilt*
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\xi x}dx = 2\pi i\sum_{w\in\mathbb{H}}\operatorname{res}_w\Big(R(z)e^{i\xi z}\Big)$$
für alle $\xi\in\mathbb{R}_+$.

Beweis: In der Tat, $\lim\limits_{z\to\infty} R(z)=0$. $\square$

Beispiel. Sei $\xi\in\mathbb{R}_+$, Dann gilt
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi x}}{x-ib}\,dx = 2\pi i\operatorname{res}_{ib}\left(\frac{e^{i\xi x}}{z-ib}\right) = \begin{cases} 2\pi i e^{-\xi b} & ,\ \operatorname{Re} b>0\\ 0 & ,\ \operatorname{Re} b<0\ .\end{cases}$$
Sei nun $b\in\mathbb{R}_+$. Dann gilt
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi x}}{x\pm ib}\,dx = \begin{cases} 2\pi i e^{-\xi b} & \text{für } -\\ 0 & \text{für } +\ .\end{cases}$$
Summe und Differenz dieser Identitäten ergibt:
$$\int\limits_0^{\infty}\frac{b\cos\xi x}{x^2+b^2}\,dx = \int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin\xi x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\xi b} \qquad \text{(Laplace-Identitäten)}\ .$$
Anwendung: berechnen wir $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (siehe Analysis-Skript, §6.6, Bsp. (7)). Es gilt:
$$\int\limits_0^{R}\frac{x\sin x}{x^2+b^2}\,dx \to \int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+b^2}\,dx\ ,\ R\to\infty$$
ist gleichmäßig in $b>0$. Daraus folgt, dass $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ existiert und
$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to 0}\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\ .$$