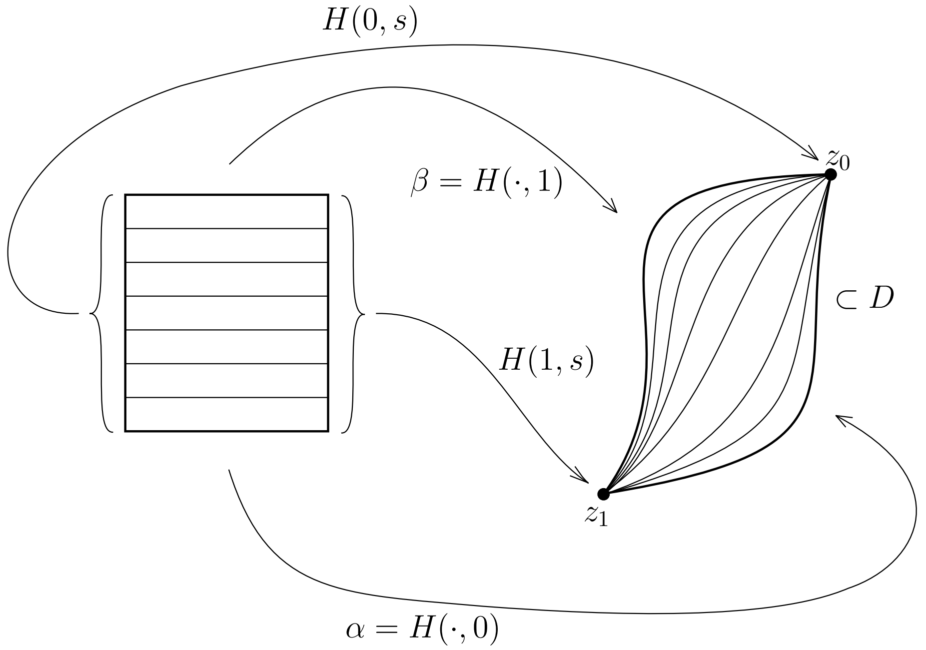
19. Vorlesung, 05.07.2017

3.3. Eine Homotopieversion der Cauchyschen Sätze.

3.3.1. **Definition.** Zwei Kurven $\alpha, \beta : [0,1] \to D \subset \mathbb{C}$ heißen ***homotop*** in D (bei festen Endpunkten) falls eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ - genannt ***Homotopie*** - existiert, so dass $\alpha(t) = H(t,0)$, $\beta(t) = H(t,1)$ für alle $t \in [0,1]$ und $\alpha(0) = H(0,s) = \beta(0)$, $\alpha(1) = H(1,s) = \beta(1)$ für alle $s \in [0,1]$. Bezeichnung: $\alpha \sim \beta \pmod{D}$. Eine geschlossene Kurve $\alpha : [0,1] \to D,\ \alpha(0) = \alpha(1) = z_0$ heißt ***nullhomotop***, falls α zur konstanten Kurve $\beta(t) \equiv z_0$ homotop ist. Bezeichnung: $\alpha \sim 0 \pmod{D}$. Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt ***einfach zusammenhängend***, falls jede geschlossene Kurve in D nullhomotop in D ist.



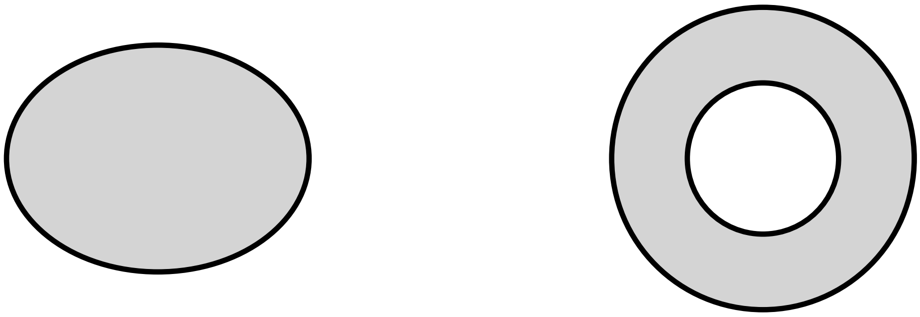
3.3.2. **Beispiel.**
(1) Ist $D \subset \mathbb{C}$ konvex und α, β haben die gleichen Anfangs- bzw. Endpunkte $\alpha(0) = \beta(0),\ \alpha(1) = \beta(1)$. Dann sind $\alpha \sim \beta$ und $H(t,s) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$.
(2) Die Homotopierelation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Sei

$$C(D, z_0) = \{\alpha : [0,1] \to D : \alpha(0) = \alpha(1) = z_0\}$$

Die Menge $\pi_1(D; z_0) = C(D, z_0)/_\sim$ ist eine Gruppe bzgl. $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$ und heißt ***Fundamentalgruppe*** von D bzgl. z_0. Das Einselement ist $e = c_{z_0}$, wobei $c_{z_0}(t) = z_0$ für alle $t \in [0,1]$. Ist D wegzusammenhängend, so sind $\pi_1(D, z_0)$ und $\pi_1(D, z_1)$ isomorph für alle $z_0, z_1 \in D$: ist $\gamma : [0,1] \to D$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$, so ist $\pi_1(X, z_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, z_1)$, $[\alpha] \to [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$. In diesem Fall lassen wir z_0 in der Bezeichnung weg und schreiben $\pi_1(D)$. Für ein Gebiet D gilt:

$$D \text{ ist einfach zusammenhängend} \iff \pi_1(D) = 1 = \{e\}.$$

(3) Konvexe Gebiete und Sterngebiete sind einfach zusammenhängend. Ein Ringgebiet $K_{r,R}(z_0)$ ist nicht einfach zusammenhängend.



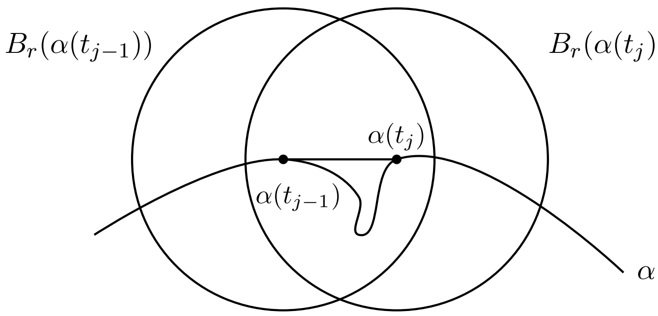
einfach zusammenhängend — nicht einfach zusammenhängend

Da wir nun mit beliebigen (d.h. stetigen) Kurven arbeiten, definieren wir das Integral längs dieser Kurven.

3.3.3. **Lemma.** *Sei $\alpha : [a,b] \to D$ eine Kurve. Dann existiert eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ von $[a,b]$ und ein $r > 0$, so dass $\alpha\left([t_{j-1}, t_j]\right) \subset B_r\left(\alpha(t_{j-1})\right) \cap B_r\left(\alpha(t_j)\right) \subset D$ für $j = 1, \ldots, n$. Ist $f \in \mathcal{O}(D)$ so, ist die Zahl*

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha(t_{j-1})}^{\alpha(t_j)} f(z)\, dz$$

unabhängig von der Wahl der Unterteilung. Ist α stückweise $\mathscr{C}^1$, so stimmt diese Summe mit $\int_\alpha f(z)\, dz$ überein.
($\varepsilon := d(|\alpha|, \partial D) > 0$; α gleichmäßig stetig $\rightsquigarrow$ $\exists \delta > 0$ usw.)



3.3.4. **Definition.**
Ist α stetig und $f \in \mathcal{O}(D)$, so *definieren* wir $\int_\alpha f(z)\, dz$ durch die obige Summe.

Sei nun $Q = [0,1] \times [0,1]$ und $H : Q \to D$ stetig. Betrachte die Kurven
$\alpha_1 = H|_{[0,1]\times\{0\}}$, $\alpha_2 = H|_{\{1\}\times[0,1]}$, $\alpha_3 = H|_{[0,1]\times\{1\}}$, $\alpha_4 = H|_{\{0\}\times[0,1]}$ und setze
$H|_{\partial Q} := \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3^{-1} * \alpha_4^{-1}$.
BILD EINFÜGEN!!!

3.3.5. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $H : Q \to D$ stetig, $f \in \mathcal{O}(D)$. Dann gilt:*

$$\int_{H|_{\partial Q}} f(z)\,dz = 0\ .$$

Beweis:
Da $H(Q)$ kompakt ist, gilt $r = d(H(Q), \partial D) > 0$.
Sei $0 < \varepsilon < r$. H ist stetig und Q kompakt $\Rightarrow$ H ist gleichmäßig stetig auf $Q \Rightarrow \exists\, \delta > 0\, \forall\, x, y \in Q\,,\ d_\infty(x, y) < \delta : d_2(H(x), H(y)) < \varepsilon$.
BILD EINFÜGEN!!!
Sei nun $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$ und zerlege Q in ein Netz von n^2 Quadrate $Q_{jk}\ (1 \le j, k \le n)$. Für alle (j, k) gilt also $H(Q_{jk}) \subset B_\varepsilon(w)$ für ein $w \in H(Q)$. $B_\varepsilon(w)$ ist Sterngebiet, also gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete

$$\int_{H|_{\partial Q_{jk}}} f(z)\,dz = 0\ .$$

Außerdem gilt

$$\int_{H|_{\partial Q}} f(z)\,dz = \sum_{j,k=1}^{n} \int_{H|_{\partial Q_{jk}}} f(z)\,dz = 0\ .$$

BILD EINFÜGEN!!!
Die Integrale auf den inneren Kurven heben sich weg. □

3.3.6. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für homotope Kurven)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$ und α, β homotope Kurven.*
Dann gilt $\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\beta f(z)\,dz$. Ist α nullhomotop, so $\int_\alpha f(z)\,dz = 0$.

Beweis:
Sei $H : Q \to D$ eine Homotopie zwischen α, β. Dann gilt nach 3.3.5

$$\begin{aligned} 0 = \int_{H|_{\partial Q}} f(z)\,dz &= \int_\alpha f(z)\,dz + \underbrace{\int_{c_{\alpha(1)}} f(z)\,dz}_{=0} + \int_{\beta^{-1}} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{c_{\alpha(0)}} f(z)\,dz}_{=0} \\ &= \int_\alpha f(z)\,dz - \int_\beta f(z)\,dz. \end{aligned}$$

□

3.3.7. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete)**.** *Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ und α eine geschlossene Kurve. Dann gilt:*

$$\int_\alpha f(z)\,dz = 0\ .$$

Beweis:
α ist homotop zu einer konstanten Kurve c_{z_0} und $\int_{c_{z_0}} f(z)\,dz = 0$. □

3.3.8. **Folgerung.** *Ist α nullhomotop in D, so ist α nullhomolog in D.*

Beweis:
Ist $z \notin D$, so ist $D \ni \zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ holomorph in D, also $n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$, da $\alpha \sim 0$. □

Die Umkehrung ist falsch. Die folgende Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, ist nicht nullhomotop, sie ist aber nullhomolog, da $n(\gamma, a) = n(\gamma, b) = 0$.
BILD EINFÜGEN!!!