Funktionentheorie – Klausur

1. Aufgabe (8+8+8 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(i)} \int_0^{2\pi} \frac{4\cos(t)}{5-4\cos(t)}dt, \quad \text{(ii)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2-2x+2}dx, \quad \text{(iii)} \int_{\partial B_1(0)} ze^{1/z}dz.$$

2. Aufgabe (8+8 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Hauptteil der Laurententwicklung von $f(z) = \frac{1}{(e^z-1)^2}$ im Punkt $z_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{res}_a(z \mapsto \frac{1}{z^3+2z^2+z})$ für $a \in \mathbb{C}$.

3. Aufgabe (4+8 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Satz von *Liouville*.

Seien f und g zwei ganze Funktionen mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Zeigen Sie, dass es $C \in \mathbb{C}$ gibt mit $f = C \cdot g$ und $|C| \leq 1$.

(Hinweis: Betrachte f/g.)

4. Aufgabe (12 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheit) des Polynoms

$$z^6 + i32z^2 - z + 3i \;\text{ in }\; \{2 < |z| < 4\}.$$

5. Aufgabe (10 Punkte)

Zeigen Sie

$$\frac{1}{z^2 - 2z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-2)^n, \quad \text{für alle } z \in B_1(2).$$

6. Aufgabe (4+6+2 Punkte)

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete mit $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Dann ist $G_1 \cup G_2$ einfach zusammenhängend.

Man betrachte die geschlossenen Kurven $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_0(t) = e^{it} + 1$, $\gamma_1(t) = e^{-it} + 1$, $\gamma_2(t) = 2e^{it}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\gamma_1 * \gamma_2$ Randzyklus von $B_2(0) \setminus \overline{B_1(1)}$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Windungszahl von $\gamma_0 * \gamma_1$ um Punkt $z = 1$.

7. Aufgabe (4+4+4+4 Punkte)

Sei f eine ganze Funktion mit $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

(a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Casorati-Weierstrass, dass f keine wesentliche Singularität in ∞ hat.

(c) Benutzen Sie (b) um zu zeigen, dass f ein Polynom ist.

(d) Verwenden Sie (a) und (c), um f zu bestimmen.