Funktionentheorie – Nachklausur

1. Aufgabe (8+8+8 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(i)} \int_0^{2\pi} \frac{3}{5 - 3\sin(t)} dt, \quad \text{(ii)} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx, \quad \text{(iii)} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\cos(z)}{z^5} dz.$$

2. Aufgabe (8+8 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Hauptteil der Laurententwicklung von $f(z) = \frac{1}{z^2(1+\sin(z))^2}$ im Punkt $z_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{res}_a(z \mapsto z^2 e^{1/z} + \frac{\cos(2\pi z)}{1-z})$ für $a \in \mathbb{C}$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Es sei $f\colon B_2(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(1/n) = \frac{n}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $f(1+i)$.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Seien f und g zwei ganze Funktionen, sodass $|f(z) - g(z)| < 2017$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass es $C \in B_{2017}(0)$ gibt mit $f(z) = g(z) + C$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

5. Aufgabe (12 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheit) des Polynoms

$$z^{10} + 3iz^8 + 1 \text{ in } \{1 < |z| < 2\}.$$

6. Aufgabe (8 Punkte)

. Zeigen Sie

$$\frac{1}{2-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{für alle } z \in B_1(0)$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \text{ ungerade,} \\ 2^{-\frac{n}{2}-1} & \text{, falls } n \text{ gerade,} \end{cases} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

7. Aufgabe (4+4+4 Punkte)

(a) Formulieren Sie das *Schwarzsche Lemma*.

Sei $D \subset B_1(0)$ ein Gebiet und sei $h\colon D \to B_1(0)$ eine biholomorphe Abbildung mit $h(0) = 0$. Weiter sei $f\colon D \to B_1(0)$ eine holomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $|f(z)| \leq |h(z)|$ für alle $z \in D$ gilt.

(c) Zeigen Sie: Gilt die Gleichheit $|f(p)| = |h(p)|$ in einem Punkt $p \neq 0$, so ist f biholomorph.