

1. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: bis 19.04.21, 23:59 Uhr auf Ilias

1. Aufgabe

(10 Punkte)

- (a) Bestimme die Kartesische und Polarform der Zahl $z = -\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$. Berechne z^6 .
- (b) Berechne $(1+i)^{200}$, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$, (wobei $n \in \mathbb{N}$), $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

2. Aufgabe

- a) Sei $w = a + ib \in \mathbb{C}$. Bestimme $z = x + iy \in \mathbb{C}$ so dass $z^2 = w$.
- (b) Bestimme die Quadratwurzeln von $w = \sqrt{3} + i$ in Kartesischen und Polarform. Berechne $\cos \frac{\pi}{12}$.
- (c) Löse die Gleichungen $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$, $iz^8 + iz^4 + 1 + i = 0$.
- (d) Löse die Gleichungen $z^6 = -\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$, $z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$.

3. Aufgabe

Über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen gleichseitige Dreiecke ABC' , BCA' bzw. ACB' mit den Mittelpunkten D , E bzw. F errichtet. Zeige dass das Dreieck DEF gleichseitig ist.

4. Aufgabe

- a) Sei $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Zeige, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$1 - \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}.$$

Finde die komplexen Zahlen z mit $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq 1$.

- (b) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Zeige $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.