2. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: bis 26.04.21, 23:59 Uhr auf Ilias

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Zeige, dass die stereographische Projektion $\sigma : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ ein Homöomorphismus ist.

(b) Zeige, dass die stereographische Projektion Kreise auf S^2 auf Kreise bzw. Geraden in $\widehat{\mathbb{C}}$ abbildet (eine Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$ ist eine gewöhnliche Gerade zusammen mit dem Punkt ∞).

(c) Eine Spiegelung von S^2 an der Äquatorebene induziert eine Selbstabbildung von $\widehat{\mathbb{C}}$. Welche?

(d) Die euklidische Metrik auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ wird mittels der stereographischen Projektion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ übertragen: Ist $z = \sigma(\xi)$ und $w = \sigma(\eta)$ so erhält man die *chordale Metrik* $\chi(z, w) = \|\xi - \eta\|$. Zeige, dass χ eine Metrik ist. Berechne explizit $\chi(z, \infty)$ für $z \neq \infty$ und $\chi(z, w)$ für $z, w \neq \infty$.

2. Aufgabe

Jeder komplexen Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2)$ wird die Möbiustransformation $M_A : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $M_A(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ zugeordnet.

(a) Zeige, dass $M_A : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ ein Homöomorphismus ist und finde $(M_A)^{-1}$.

(b) Zeige, dass die Menge $\mathcal{M}$ aller Möbiustransformationen eine Gruppe ist (wobei die Gruppenverknüpfung die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist).

(c) Zeige, dass die Abbildung $\mathrm{GL}(2) \to \mathcal{M}$, $A \mapsto M_A$ ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathbb{C}I_2$ ist.

(d) Zeige, dass eine von der Identität verschiedene Möbiustransformation mindestens einen und höchstens zwei Fixpunkte besitzt.

Bitte wenden.

3. Aufgabe

Das Doppelverhältnis vier verschiedener komplexer Zahlen ist als $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} : \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ definiert.

(a) Zeige: Vier Punkte z_i, $i = 1, \dots, 4$ in der Ebene liegen genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ reell ist.

(b) Zeige, dass eine Möbiustransformation M_A das Doppelverhältnis nicht verändert, d. h. $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(w_1, w_2, w_3, w_4)$, wobei $w_j = M_A(z_j)$ für $j = 1, \dots, 4$.

(c) Eine Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$ heißt verallgemeinerte Kreislinie, falls sie entweder eine Kreislinie in $\mathbb{C}$ oder eine (nicht notwendig durch 0 gehende) Gerade vereinigt mit dem Punkt ∞ ist. Zeige, dass Möbiustransformationen verallgemeinerte Kreislinien auf verallgemeinerte Kreislinien abbilden.

(d) Es seien (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) zwei Tripel jeweils verschiedener Punkten in $\widehat{\mathbb{C}}$. Zeige, dass es genau eine Möbiustransformation M_A gibt mit $M_A(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$.