4. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie
Abgabe: bis 10.05.21, 23:59 Uhr auf Ilias

1. Aufgabe

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Zeige:

(a) Für $b \in D_r(a)$ läßt sich f auch in eine Potenzreihe um b entwickeln. Bestimme die Koeffizienten bzgl. der Entwicklung um b.

(b) Sei $z_k \to a$ eine konvergente Folge mit $z_k \neq a$. Ist $f(z_k) = 0$ für $z_k \in D_r(a)$, dann gilt $a_n = 0$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$, d.h. $f \equiv 0$.

2. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Berechne $\int_\gamma (x^2 - iy^2)dz$, wobei $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$.

(b) Berechne $\int_\gamma ze^{z^2} dz$, wobei γ

 (i) die Verbindungsstrecke zwischen 0 und $1 + i$ ist,

 (ii) das Stück der Parabel $y = x^2$ ist, zwischen 0 und $1 + i$.

(c) (i) Zeige, dass $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

 (ii) Für $R > 0$ betrachte die Kurve $\gamma(t) = Re^{it}$, $\gamma : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{C}$. Zeige:

$$\left| \int_\gamma e^{iz^2} dz \right| \leqslant \frac{\pi(1 - e^{-R^2})}{4R} < \frac{\pi}{4R}.$$

3. Aufgabe

Sei γ eine geschlossene glatte Kurve. Für $z \notin |\gamma|$ definiere die *Windungszahl*

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Zeige: Es gilt $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ und $n(\gamma, z)$ ist in jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ konstant.
Hinweis:

(i) Betrachte zuerst eine glatte Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ von a nach b und setze

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\dot{\gamma}(\tau)}{\gamma(\tau) - z} d\tau \quad \text{für} \quad t \in [0, 1].$$

Bitte wenden

Zeige: $\frac{d}{dt}[(\gamma(t) - z)e^{-\varphi(t)}] \equiv 0$ und folgere $\exp \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{b-z}{a-z}$.

(ii) Benutze, dass $n(\gamma, z)$ stetig auf $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ ist.

4. Aufgabe

(i) Sei $\Delta \subset \mathbb{C}$ ein offenes Dreieck. Sei f holomorph in Δ und stetig auf $\overline{\Delta}$. Zeige, dass $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

(ii) Sei D ein Sterngebiet und L eine Gerade. Sei f stetig in D und holomorph in $D \setminus L$. Zeige, dass f eine Stammfunktion auf D besitzt und holomorph in D ist.