5. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: bis 17.05.21, 23:59 Uhr auf Ilias

1. Aufgabe

(10 Punkte)

(i) Sei D ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph. Zeige, dass eine holomorphe Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(g) = f$ existiert, genau dann, wenn für jede geschlossene stückweise $\mathcal{C}^1$ Kurve γ gilt

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

Eine solche Funktion g heisst einen holomorphen Logarithmus von f .

(ii) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z+i} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) := 2e^{it}.$

(b) $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2(z^2+16)} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) := 2e^{it}.$

(c) $\int_{\gamma} \frac{2z^2 - 15z + 30}{z^3 - 10z^2 + 32z - 32} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) := 3e^{it}.$

(d) $\int_{\gamma} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n dz, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) := 1 + e^{it}.$

2. Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und M ein Rechteck dessen Abschluss in D enthalten ist, d. h. $M = \{z : a < \operatorname{Re}(z) < b, c < \operatorname{Im}(z) < d\}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $\overline{M} \subset D$. Sei $M \neq \emptyset$, $a_1, \dots, a_n \in M$ paarweise verschiedene Punkte und $f : D \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Zeige, dass es $\epsilon > 0$ gibt mit

$$\int_{\partial M} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\partial B_{\epsilon}(a_j)} f(z) dz,$$

wobei $\partial M = [a + ic, b + ic, b + id, a + id, a + ic]$ ist.

(b) Sei $h(z) = e^z \prod_{j=1}^n (z - a_j)$ und setze $f(z) = \frac{h'(z)}{h(z)}$. Zeige: $\int_{\partial M} f(z) dz = 2\pi i n$.

3. Aufgabe

(a) Sei G ein konvexes Gebiet, d. h. mit $a, b \in G$ liegt auch die Spur der Verbindungsstrecke $[a, b]$ in G . Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph (und f' stetig) mit $|f'(z) - 1| < 1$ für alle $z \in G$. Zeige, dass f injektiv ist.

(b) Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z + \frac{1}{3}e^z$, wobei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe ist. Zeige, dass f injektiv ist.

Bitte wenden

4. Aufgabe

(a) Seien $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ und $g : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Für $a \in \mathbb{C}^*$ (bzw. $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$) finde die Taylorreihe von f (bzw. g) um a und berechne ihren Konvergenzradius.

(b) Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{1-z-z^2}$ ist holomorph in 0. Zeige, dass ihre Taylorreihe um 0 die Form

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n$$

hat, wobei $(f_n)_{n \geq 0}$ die Fibonacci-Zahlen sind: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Wie groß ist ihr Konvergenzradius?