# 6. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: bis 24.05.21, 23:59 Uhr auf Ilias

## 1. Aufgabe

(a) Berechne:

$$\int_{\partial B_2(1)} \frac{\sin^2(z)}{z^3} dz \quad \text{und} \quad \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\sin(z)} dz.$$

(b) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$. Zeige:

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = 2\pi i \frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}, \quad \text{falls } r > \max\{|z_1|, |z_2|\}.$$

Was gilt für $z_2 \to z_1$?

## 2. Aufgabe

Sei $U \subset \mathbb{C}^*$ offen und $\alpha \in \mathbb{C}$. Eine stetige Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heisst Zweig von $z^\alpha$ auf $U$ falls ein Zweig $\ell : U \to \mathbb{C}$ des Logarithmus existiert und $f(z) = e^{\alpha \ell(z)}$, $z \in U$.

(a) Zeige, dass $f$ holomorph ist und $f'(z) = \frac{\alpha}{z} f(z)$, $z \in U$.

(b) Sei $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $g(z) = e^{\alpha \log(1+z)}$, wobei log den Hauptzweig des Logarithmus ist (also ist $g$ ein Zweig von $(1+z)^\alpha$). Zeige, dass

$$g(z) = (1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad \text{für } z \in \mathbb{D}.$$

## 3. Aufgabe (3+2+2+3 Punkte)

(i) Gibt es jeweils eine in einer geeigneten Nullumgebung holomorphe Funktion $f$ mit $f(1/n) = a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine der folgenden Folgen ist?

(a) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, \dots$ bzw.

(b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots$ bzw.

(c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$

(ii) Gibt es eine holomorphe Funktion $f$ in einer geeigneten Nullumgebung mit $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n$ für $n \in \mathbb{N}$?

(iii) Finde alle holomorphen Funktionen in einer Nullumgebung, so dass $f(1/n) + f''(1/n) = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, so dass für jede Taylorentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z_0)(z-z_0)^n$ ein $k \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $a_k(z_0) = 0$. Zeige, dass $f$ ein Polynom ist.

Bitte wenden

**4. Aufgabe**

Die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ ist in 0 holomorph fortsetzbar und ihre Taylorreihe um 0 schreibt man in der Form

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n\,,$$

wobei die $B_n$ Bernoullische Zahlen genannt werden.

(a) Berechne $B_0, B_1, B_2, B_3$. Zeige, dass $f(z) + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2i} z \cot(\frac{1}{2i}z)$ und $f(z) + \frac{1}{2}z$ eine gerade Funktion ist. Zeige, dass $B_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für $n, p \in \mathbb{N}$, bezeichne mit $S_n^p = 1^p + \ldots + n^p$. Berechne $S_n^1$, $S_n^2$, $S_n^3$, $S_n^4$. Gibt es eine Gesetzmässigkeit bei der Bildung von $S_n^p$? Bernoulli hat die folgende Formel erraten

$$S_n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \frac{1}{2}\binom{p}{1} B_2 n^{p-1} + \frac{1}{4}\binom{p}{3} B_4 n^{p-3} + \\ + \frac{1}{6}\binom{p}{5} B_6 n^{p-5} + \frac{1}{8}\binom{p}{7} B_8 n^{p-7} + \ldots$$

Zeige, dass

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{S_n^p}{p\,!}\, z^p = 1 + e^z + \ldots + e^{nz} = \frac{z}{e^z-1} \cdot \frac{e^{(n+1)z}-1}{z}$$

und beweise die Bernoullische Formel durch Koeffizientenvergleich.